IV

IOHANN. BAPTISTAE CARACCIOLI

CLERICI REGVLARIS

IN PVBLICA PISANA ACADEMIA
ARITHMETICAE, ET ALGEBRAE VNIVERSAE
A T Q V E
OPTICAE DIOPTRICAE CATOPTRICAE
PROFESSORIS

PROBLEMATA VARIA MATHEMATICA.

ACCEDIT

EXAMEN MACHINAE MOTVS PERPETVI.

FLORENTIAE ANNO MDCCLV.
TYPOGRAPHEIO CAESAREO

PRAESIDVM PERMISSV.

EMINENTISSIMO PRINCIPI

S. R. E. CARDINALI
HENRICO ENRIQVEZ

IOHAN. BAPTISTA CARACCIOLVS
bene agere

Quanta animi propensione Opus hoc meum Tibi destinem, EMINENTISSIME PRINCEPS, *exploratum habere Te, valde confido. Pro certo enim habeo, studium meum erga Te, atque observantiam non animis modo, sed & prope oculis Tibi iugiter obversari. Id primum me impulit, ut ita agerem; tum necessitudinis plura vincula, quibus continemur; deinde incitavit utriusque nostrum voluntatis quaedam consensio; postremo aliquorum etiam studiorum convenientia. Etenim primum Theologicis disciplinis institutus es: postea ad philosophicas*

quoque, & mathematicas animum adiecisti; quarum prima elementa Neapoli primùm Patria nostra à perito Viro; deinde in tuis oppidis ab alio satis gnaro illuc dedita opera deducto; qui vitam adhuc degit; intellexisti. In Vrbe eadem qua Graecam, qua Latinam linguam curasti edoceri. Sed in latina posthac subsistere voluisti; quarundam aliarum praesentium linguarum scientia ad utilitatem instructus. Ita Tua studia, Amplissime Vir, ad nostra; quae sane tenuissima; quadam cognatione pertinuerunt. In Theologicas vero doctrinas cum reliquis; quaequae sunt; sacrae Eruditionis adiunctis curam, cogitationemque omnem in posterum contulisti: & abunde illarum; de quo constat; adeptus es. Igitur Theologiae scita prima habes: quae tua sunt impense grata; & in quibus denique acquievisti. Posteriorem coniungis quidem Iurisprudentiam; quam Neapoli apud praeceptorem nominis celebritate proferendum Matthaeum Egizium Neapolitanum Civem didicisti. Ea ipsa litterarum studia; verùm praecipua semper Theologica; toto tempore XXX. *admodum annorum; quo Romani Praesulis dignitate potitus es; & ex quibus decem circiter & octo Praeses illustriorum Pontificii Principatus Civitatum; atque ad Legationes quasdam missus arduas; denos vero, & amplius egisti Nuntius Apostolicus in Hispanicis Regnis apud duos deinceps Reges potentissimos* PHILIPPVM V. & FERDINANDVM VI. *atque temporibus difficilibus; de tua vero in munere unoquoque illorum, maximè ob temporum rationem, in postremo rectè officii administrandi prudentia, propositique in agendo sanctitate non à me nunc facta*

verba

verba sunt ; sed iam tum fama erat ; ne intermisisti quidem, nedum non deseruisti ; litterata otia cum negotio permiscere satis eruditus. Quae duo ; si inscitia non vetet ; absit vero desidia ; geniove ; ubi per occupationem licet ; indulgendi cura, umbratilisque vita ; semper ; quantacumque sit agendarum rerum vis, & magnitudo ; bene simul poterunt sociari.

Porro iam Te à Geometria iuvenibus annis sedulo quidem addisci coepta minimè tunc deterrebat ; cum sacris addici iam mente volveres ; fallax illa aliquorum opinio, eum, qui Mathematica exercet studia, animos ad Deum, verumque divinarum commentationem intentos minus posse habere : aut etiam ; quod absurdius diceretur ; inde avocari. Persuasissimum sibi habeat ; qui ita existimat ; siquidem suae rationis munere fungi velit ; in summo se errore iudicii versari ; cuius posse & argumentis, & exemplis nullo negotio convinci. Geometricae scientiae directo vere non spectant Divina : neque de illis agit Geometra. Id pueri norunt : communeque illud est huius cum ceteris ; Theologia sola seclusa ; disciplinis. At etiam quòd Geometricae cognitiones obstent, quo minus animum ad Deum, & coelestia attendamus ; & longe magis quòd ab illis porro mentem agant (si neutrum dicitur ; nil in hac quaestione definitur ; & dicitur ; non disputatur enim de Theologia magis quàm ceterae omnes disciplinae ; non solum quàm Geometria ; ad Deum pertinente ; nostrasque meditationes in illo defigente ; quod liquet) id, si affirmaretur, a recta ratione prorsus abhorreret.

Duo

Duo autem sunt, via non directa; & obstaculum; tantoque magis si recedendum sit; omnino diversa. Mentem a divinis prorsus amovent fallacia: & avertunt inepta. Geometria non nisi verum complectitur; non docet nisi grandia, & praeclara. Argumentum item illud eiusmodi opinationes invictè semper oppugnabit, & proteret; mathematicas litteras propter evidentiam Veritatis demonstratae; ideoque a nobis per demonstrationem perceptae; quod à cuncta humana doctrina procul abest; aptissimas omnium esse notitiae, & admirationi in nos inducendae Primi auctoris Veritatis. Vtraque vero increscit ob tot, & tam mirabilia; quae Geometria perscrutatur, invenit, & perspicuè manifestat. Exemplis minimè vero deficimur. Et quidem de materia hac late meminimus in Commentario Epistolae D. Gregorii Nysseni; quae secunda est inter alias à nobis primo editas; ubi cum rationibus, tum exemplis nostrorum Sanctorum Patrum, aliorumque Sacrorum Scriptorum rei veritatem in illustri loco ponere, confirmareque pro viribus enisi sumus. Vnus est Venerabilis Beda ibi indicatus; sed opera silentio praetermissa non inane erit hic; ut magis id ratum agnoscatur; enunciare. Sunt autem Arithmetica multa de numeris; & de propositionibus arithmeticis: de numerorum divisione: de computo: de ratione Calculi: de Vnciarum divisione. Et Chronologica, de argumentis Lunae: Ephemeris; sive Computus Vulgaris: de Embolismorum ratione: de Cyclo paschali: de ratione computi: de paschae celebratione; sive de aequinoctio Vernali: de temporum ratione: de temporibus

ribus. Et Astronomica de mundi coelestis constitutione: de Circulis sphaerae: & de Polo: de Planetarum, & signorum coelestium ratione: de astrolabio. Epistola etiam de divinatione Mortis, & Vitae existit inscripta, Petosyris ad Necepsum Regem Aegypti. Ergo opus hoc mathematicum, Vir praestantissime, quod tibi datum, dicatumque expetivi; lubens recipis; etiamsi Collegii sis S. R. E. Cardinalium; qui post primam Pontificis Maximi Potestatem, Summi sunt Sacrorum omnium Antistites. Quoniam Tibi cum sapientibus constat de mathematicis studiis; nequaquam illa, & Sacerdotium mutuo repugnare.

Inter proposita hoc libro Problemata, EMINENTISSIME CARDINALIS, *invenitur illud de trapetio cuiusvis generis ex quatuor datis rectis lineis conformando; & intus circulum inscribendo; aut circa circulum describendo: vel de dato circulo intus trapetium inscribendo; aut circa describendo; rectis autem datis lineis nonnullae adponi debent conditiones: subinde ex illis quodvis genus trapetii, seu Figurae quadrilaterae circulo inscribendae, vel circum describendae constituetur. Huius problematis; quod in plura alia dispertitur; sicuti fere omnia reliqua; quodque in Elementis Geometriae Euclidis (de ingenuis loquor Elementis ipsiusmet Euclidis; quae neque castigata sint; neque emendata; adaucta; diminuta; in brevius adducta; neque propositiones Euclidis contineant in meliorem ordinem, melioremque, & novam formam relatas; aut magis necessarias è ceteris depromptas; excerptas. Quod idem fatum Apollonii fuit, & Archimedis)*

dis) *minime extat*: *neque nos apud aliquem Geometram illud vidimus*; *nostrae solutiones sola severa geometria absolutae fuerunt*. *Cum vero problema usum aliquando pro artibus posset obtinere*; *praxes*, *quas nuncupant*; *exposcerentur ad operis effectionem faciliorem*. *Nobis minime datum est illas aliquoties quaerendo investigare*. *acriora ingenia sollertius idem indagabunt*; *& postmodo adsequentur*. *Aliud Problema de solido cochleari praeter difficultatem*; *qua reliqua non carent*; *historice solum aio*; *dignitate etiam aliqua videtur effulgere*. *De dimensione solidi in illo peragitur enati à Figura curva non in uno*, *& eodem plano iacente*; *sed in diversis*; *qualis Cochlea est*; *quae idcirco in plano nequit designari*. *Igitur abstrusa erit generationis solidi geometrica inventio*. *Dimensionis autem geometricae solidi maior*, *minorve difficultas à generatione illius magnam partem proficiscitur*. *Et eiusmodi aliae curvae sunt*; *unaque est Epicyclois*; *quam currus in adductum orbem*, *aut multum angustam viam conversi rota*; *donec currus ex flexuoso fiat directus*; *describit tum antica*, *cum postica*, *utraque opposita conversioni*; *modo duae posticae rotae non subsistant*; *quod in arctissimis conversionibus accidere potest*; *tunc enim dicta postica non movebitur*. *Multiplices autem esse possunt eiusmodi conversiones*; *& spatiosae*: *in quibus currus per incertos flexus*, *etiam iussos*, *& propositos*; *si auriga sit artis vim equorum dispensandi scientissimus*; *deferetur*. *Sed de conversionibus coarctatis verba facimus*. *Eae igitur rotae duae antica*, *& postica*, *utraque*

que

que opposita conversioni, singulae; dum aliae duae; si non sistant; quàmparvo arcu circa proprium axem verticalem, ideoque per punctum contactus soli, & rotae pervadentem revolvuntur; signare incipiunt puncto in contactu subiecti soli ex una parte accepto circulum basim curvae, eodem tempore, quo ex altera adhaerente parte aliud punctum per duplicem motum rotationis, & progressionis verti coepit in Epicycloidem; quam identidem progignit. Est vero is circulus basis curvae concentricus illi; circa quem in eadem conversione fertur extremum temonis; cuius centrum medium est punctum in foramine; quo axis duarum anticarum rotarum pertusus est; inserto clavo. Haec igitur Epicyclois describitur non in uno manens plano. Quod per exploratos motus illos demonstratur iuxta naturam Epicycloidis. Non ita Cyclois; quam unaquaeque rotarum rectâ decurrentis currus designat duplici quoque motu rotationis, & progressionis. Nam illa tum cum circulo genitore; qui est rota (rotam latiori significatione appellamus circulum) tum cum recta linea basi curvae sumpta super solo, aut molli solo impresa in uno invenitur plano.

Solutiones problematum plerumque sequuti sumus, PERDOCTE VIR, *analyticas algebricas; aliquando tantum analyticas. Et ita geri nos opus erat; si eam mathematicae partem; quae arithmetica est, & algebra universa; ad alias adiunctam publicè in Accademia profitebamur; novo accademico munere nulli secundo aliorum, quae sapientissimus Imperator Caesar Etruriae Dominus in Pi-*

§ § *sana*

ſana Academia ad illius decus, iuvenumque utilitatem providentiſſimè voluit de integro ſtatuta. Solutiones etiam ſyntheticae nonnullae occurrent; quarum aliquas algebricis ſubnexuimus; ad eum praecipuum finem (& id negotii vehementer curare voluimus, VIR SAPIENTISSIME; *res enim cordi maximopere habebatur); ut omnis conſenſio Geometriae ſyntheticae, & algebricae non modo, ſed & etiam; quod caput eſt; algorithmi algebrae; quo illius calculi praecepta continentur; non quidem alicuius diſputationis ratiunculis, & commentis; vel metaphyſicorum acuminum apparatu; ſed reipſa per problematis ſolutionem, & per ea, quae inde conſectantur, clare & dilucide cerneretur. Id ſparſim, praeſertim vero in ſcholiis idcirco crebris perfectum eſt. Norunt autem in utraque Geometria edocti quantum verè altera alterius opem coniurantes amice poſcat; & exoret. Quandoquidem in conſtructione algebricae aequationis; quae problema ſemper concludit determinatum; & cuiusvis generis eſſe illud poteſt; Geometria ſynthetica algebricae ſuppetias ire poteſt; ſi propter aequationis plurium dimenſionum indolem, regulae; ſiquidem habeantur; deiiciendi illam; quod facere neceſſe; ad ſuam propriam ſedem, cum ad altiorem ea evecta ſit; id vero per praedictas normas, aut aliqua alia ratione cognoſcere analyſta debet; ita ſint involutae, uſuque difficiles, ut commode in propoſitam rem nequeant adhiberi. Synthetica tum Geometria conveniatur; per quam aliqua via ei perplexitati proſpiciatur. Alterna vice algebrica Geometria ſyntheticae ſubſidio venire poteſt tutiſ-*

ſimo

ſimo cum locis Geometricis; ne curva una deſumatur pro altera: in quo maxime erraretur. Complectuntur autem loci Geometrici problemata indeterminata; quae per curvas conicas conficiuntur. Atque circa problemata determinata cuiusvis generis, & indeterminata, etiamſi ad curvas tantùm pertinentia conicas plurima vertitur Geometria. Sola etiam analyſis; certo ea de cauſſa, quia algebra comite deſtituta eſt; quamque unam veteres perſciebant; cum perſaepe eſt infirma; tum etiam bene pauca; ſi problema non vulgare ſit; miniſtrat analyſtae: ideoque parum ultra poteſt protendi. Ergo quantum admirabile, quantum utilitate plenum inventum fuit immittendi quinque Arithmeticae communis operationes in analyſim ſimplicem; quod cum aliis additis artificiis inde tamen uſque multam partem repetitis analyſim compoſuit algebricam? Huius Veterum analyſis ſpecimina conſpiciuntur apud Conicorum libros Apollonii libro ſecundo problemate II. III. IV. VI. VII. VIII. *Perilluſtre autem eſt exemplum M. Archimedis lib.* II. *de Sphaera, & Cylindro problemate primo; quo, dato Cono, vel Cylindro Sphaera quaeritur aequalis: atque optima analyſis duas medias proportionales inter duas datas rectas lineas adinveniendas eſſe, illi patefecit. Multa quoque per eam analyſim effecta apud Pappum A. comperiuntur. Et veteres Geometrae arte hac eadem analytica fere omnia ſolvebant problemata; quam ex occulto nobis prodiderunt. Quod alibi in Nichomedea curva Conchoidis oſtendimus. Verùm elumbis analyſis eſt; & non raro vacillans. Proponit idem Pappus lib.* IV. *propoſitione* XXXI. *problema; dato*

§§ 2 *paral-*

parallelogrammo rectangulo; cuius unum latus producatur; ducere opus sit rectam lineam ex uno eius angulo; & facere partem eius interiectam inter latus alterum, & productum aequalem rectae lineae datae. Et analysi more veterum usus illud conficit per interfectionem duarum curvarum; nempe circumferentiae circuli, & hyperbolis inter asymptotos; quibus in analysi adsumptis exequitur etiam illius compositionem; quam nos constructionem dicere solemus: in quo deliquit. Problema enim est duarum dimensionum; ad quod iccirco solo circulo est opus. Id algebrica analysis invenit praebendo aut aequationem quatuor dimensionum; sed quae inferius ad duas deprimitur; sicuti effecit Cartesius in eodem problemate lib. III. *Geometriae; aut aequationem duarum dimensionum; quô per reconditam algebricam analysim devenitur. Et idipsum ibidem admonuit Cartesius, sola incognita indicata recta linea adsumenda; alii vero solutionem adinvenerunt. Aberrare analystes item algebricus potest: at vero longe difficilius, quàm si algebrae careat adminiculo: id autem dicimus. Geometricam in his appellamus Algebram; saepe vero Geometriae nomen pro universa mathematica usurpatur. Perridiculum autem existimandum est, à partibus universae mathematicae algebram separare; quod liquet: attamen aliquando factum videtur. Quid dicam nescio: dicam tantum; semper magis firmum, ratumque experientia deprehendi pronunciatum illud: Felices erunt artes; si soli artifices de iis iudicabunt. Iam vero ex consensione demonstrata inter syntheticam, & algebricam Geometriam magis haec emicabit eximia disciplina;*

plina; magisque noscetur, quantum adolescentes, praesertim naturalis philosophiae studiosos cohortari, ut illam missam non faciant, par, & aequum sit quà privatis sermonibus, quà publicis Orationibus; quibus rectè instituendorum studiorum praecepta exponuntur. Indeque quanta nota dignum erit, si; dum inter illa praecepta, in loco, qui medicinae artem spectat; commemorantur aliae mathematices partes; haec; de industria, an secus quaerere frugi, sobriumque Virum, & aliis etiam de caussis pudeat; praetereatur? Hanc sane gravissimam doctrinam, non aliam quandam levissimi momenti, nonnisi Vir in humanitate minime versans, nilque liberaliter educatus magni facere minus volet. Difficilis, abstrusaque illius materies cuiusvis Iuvenum menti à nonnullis, certissime plus aequo, obtendi solet. Praetextus non raro erit: & deceptio est manifesta. Semper enim aliquis illorum erit; qui; si in istitutionem obnixe operam impendat; atque obfirmata sit voluntate; poterit contra difficultatem fidenter, & prospere ire; cum tamen mala persuasione refugiat. Quis; si studio non agat; concedere detrectabit; Iuvenem philosophicis studiis devotum; aut etiam qui ea sola cooptarit; idoneum Geometriae, physicaeque Summi Nevvtonj; quae etiam horum temporum moris est; reddere oportere? Atqui neminem latet, unice ad id opus esse penitissima algebrica scientia; si utraque illarum in ipsomet auctore sedulo, & etiam omnino addisci aveatur. Quam Nevvtonianam physicam; ut rem veram enuntiem; primi nos in Academiam intulimus; scilicet primi; cum physicam in illa profitebamur; Academicis iuvenibus expli-

explicavimus; proximè enim antea aut Cartesianae sententiae, aut Democriticae cum nonnullis Galilei propositionibus tradebantur.

Libra in examine machinae motus perpetui à nobis reiecta praesertim num. IV. *&* VI. *non est quidem inflexa; quam esse posse, nos non praeterit. Habet enim Libra machinae radios duos non angulo coniunctos; qualis inflexa; verùm in duobus locis seorsum positos num.* IV. *aut ex una parte radium unum; & ex altera duos circa centra duo circumactos num.* VI. *Igitur abnormis Libra est; non inflexa; seu obliqua; uti de Libra inflexa rectè docuit propositione* XXXIX. *lib. de vi percussionis Neapolitanus noster Borellius natus Neapoli in Arce, quae dicitur Castrum Novum ann.* 1608. *quod legitur in eius Vita à P. Carolo Io: à Iesu Cler. Regularium Pauperum Matris Dei Scholarum Piarum Praeposit. Generali conscripta, & egregio Borellii Libro de motu animalium praemissa. Parentemque suam Parthenopeam Vrbem eximius hic methematicus; & magnus Philosophus; de quo utroque per eius opera constat; cultor quidem physicae mechanicae cum Cartesio, Gassendo, Malpighio, Guglielminio, Montanario, aliisque ad laudem insignibus viris; non immechanicae; sed tamen magnus; nominat in Epistola ad Andream Concubletium Marchion. Arenae; qua ei suum librum de motionibus naturalibus à Gravitate pendentibus dedicat; dum claritate memorabilem Academiam in Concubletii aedibus Neapoli excitatam meminit; ad quam ipse cum abunde famam possidentibus Thoma Cornelio,*

Fran-

Francisco de Andrea, Leonardo a Capua, Luca Antonio Portia, aliisque Neapolitanae Vrbis Civibus non quidem è Regno Neapolis, adscitus erat. Fallax enim opinio; sicuti tum priscorum, cùm praeter nuper dictos recentium etiam Lucae Tozzii; Alexandri Riccardi, Dominici Aulisii, Blasii Carofali, Ioh. Baptistae de Vico, Constantini Grimaldi, Antonii de Monforte, Hyacinthi Cristophori, P. Ioh. Baptistae de Miro O.D. Benedicti, Matthaei Egizii, Donati de Aste, & Nicolai Cirilli, atque Nicolai Capassii amborum modo non Neapolitanorum; aliorumque; & illorum; qui vitam adhuc agunt historia indicat de Neapolitanis Viris litteratis; erit; & nonnullorum fuit; Neapolitanam doctrinam non ita in iis insidere; quorum Vrbs Neapolis proprium natale solum; ut in multis illis, qui ab alieno caelo provinciarum Neapolim ventitant; & non raro illuc advecti quo pruna, & coctona vento. Verùm Civitati nostrae cerno equidem, o Nobilissime mihi Popularis, *in multis non parum inivideri. In ipsa eadem Academia experimenta naturalia; sicuti praedictus Auctor ibidem litteris commendavit; adcuratissime pertentabantur; quae in praeclara Academia tentamentorum experientiarum Florentina; cuius pars magna Borellius; vestigata fuerunt. Idemque Borellius lib. quoque de vi percussionis cap.* XIII. *subtiliter percussionem corporum motibus obliquis sibi occurrentium pertractavit.*

Non aliud quippiam de Opere, Eminentissime Princeps, *praefari ad illius notitiam oportet; singularia enim problemata sunt; quorum natura per se patens;*

cum

cum reliqua ſint ſuis locis ſatis expoſita; nullis priùs per praefationem cognitis indigebat. Quae vero pauca de duobus illorum antea narrare opus erat, iam praedicta intellexiſti. Id reſtat, quod ſignificem; perſuaſiſſimum eſſe mihi, non modo Te ob virtutem, animique cultum; quem ex inſtitutione, & ſtudiis comparaſti; dedicatum tibi opus benevole excepturum; verùm etiam fore, ut eiſdem de cauſſis Libro non id; ſicuti ſolet; ingrati, & modice non ferendum adveniat, in bibliothecae forulos; nonnullis ſemel, aut bis raptim evolutis paginis; amandari. Ergo à Te lubenti, hilarique animo; pro certo habeo; ille legetur; quando à negotiis vacabit; quae certo multa, & magna novi equidem futura in perampla nunc adminiſtranda Ravennate Provincia Tibi data, cum vix Sanctiſſimo Senatui fueris adiunctus. Quod ſi tua perlectum Librum commendatio ſubſequatur; id ſane primo loco exceptorum à me fructuum laboris mei; quanticumque is ſit; eſt autem minimi; putabo.

PROBLEMA PRIMVM GEOMETRICVM.

LEMMA I.

SINT quatuor quaevis magnitudines datae $a.b.c.d.$ omnes inaequales; quarum minores tres in summa sunt maiores maxima a. Erunt rectangula duo quaevis ex illis bis accepta maiora quàm summa maior quadratorum duarum ex iisdem; dempta summa minori quadratorum aliarum duarum. PROBL. I. *TAB I.* FIG. I.

Itaque erit $2ab + 2cd > aa + bb - cc - dd$. Et $2ac + 2ab > aa + cc - bb - dd$. Itemque $2cb + 2ab > bb + cc - aa - dd$. Demonstratur.

Nam est (*hypothesi*) $c + d + b > a$. quare erit $c + d > a - b$. & $cc + 2cd + dd. > aa - 2ab + bb$. & inde $2cd + 2ab > aa + bb - cc - dd$. Eadem ratione; cum sit $c + d + b > a$; erit etiam $d + b > a - c$. & $dd + 2db + bb > aa - 2ac + cc$. Inde $2db + 2ac > aa + cc - bb - dd$. Atque cum sit $c + d + b > a$; erit quoque $b + c > a - d$. Et $bb + cc + 2bc > aa - 2ad + dd$; indeque $2bc + 2ad > aa + dd - bb - cc$.

COROLLARIVM.

Hinc idem erit; si ex quatuor datis quantitatibus omnibus inaeqnalibus tres omnifariam acceptae sint maiores reliqua. Etenim; si tres minores ex illis sint in summa maiores maxima; in-

de neceſſario conſequitur; tres omni modo acceptas eſſe maiores reliqua. Colligitur etiam ex demonſtratione, verum quoque eſſe Lemma; ſi ex quatuor datis magnitudinibus inaequalibus tres ſint aequales; maiores quidem in ſumma, quàm reliqua: aut duae ſint aequales, & duae inaequales; vel denique duae ſint aequales inter ſe; & duae inter ſe aequales; modo tres omnifariam acceptae ſint maiores reliqua.

S C H O L I V M.

Manifeſta eſt neceſſitas conditionis Lemmatis. Nam ſi quatuor ſint rectae lineae datae, ſeu quaevis magnitudines *p. m. n. q.* quarum minores tres non ſint in ſumma maiores maxima; ſive
FIG. II. tres omnifariam acceptae non ſint maiores reliqua; propoſitio non conſiſtit.

L E M M A II.

TRapetium regulare; cuius nempe duo latera oppoſita ſint parallela; alia vero minime; inſcriptum Circulo habet duo alia latera oppoſita non parallela ſemper aequalia.

Sit enim Circulo *Q* inſcriptum trapetium regulare *DABC*. cuius duo latera *DC. AB*. parallela. Et producantur *DC* ad *I*.
FIG. III. atque *BA* ad *E*. Erit angulus *EAD* aequalis angulo *DCB*. propter trapetium inſcriptum; atque aequalis etiam angulo *ADC*. propter parallelas. Igitur *ADC*. erit aequalis angulo *DCB*. Inde circumferentia *ABHC*. erit aequalis circumferentiae *BAPD*. & ablata communi *AFB*. erit circumferentia *DPA*. aequalis *CHB*. Et igitur chorda *DA*. erit aequalis chordae *CB*. Sunt vero *DA. CB*. latera duo trapetii oppoſita non parallela. Idem autem eodem modo oſtendetur; ſi parallela fuerint duo latera oppoſita *DA. CB*. Ergo patet quod propoſitum eſt.

Vera eſt etiam propoſitio converſa; poſito quidem deſcripto
EADEM FIG. intus circulum quadrilatero *DABC*. ſeu; quod idem eſt; poſita deſcripta intus circulum Figura; in qua angulus *EAD* ſit aequalis angulo *DCB*. Itaque dicatur. Ma-

Manifesta est Propositio conversa; si nempe in Circulo sit $DA = CB$; & angulus $EAD =$ angulo DCB; esse DC parallelam AB.

PROPOSITIO I.

Ex quatuor datis rectis Lineis omnibus inaequalibus CD. DA. AB. BC. trapetium constituere; quod Circulo possit inscribi. oportet autem ut tres omnifariam sumptae maiores sint reliqua. Sit CD maior DA. & DA. maior AB. quae maior BC. FIG. IV.

Ponatur factum esse quod quaeritur. Et sit trapetium performatum $ABCD$. quod Circulo possit inscribi. Iungatur diagonalis AC. quae dividet trapetium in duo triangula. Erit quidem trapetium irregulare (*Lemmat. II.*) nulla habens latera opposita parallela; atque cum Figura sit quadrilatera habebit angulos aequales quatuor rectis; cumque inscribenda sit Circulo; anguli duo oppositi erunt aequales duobus rectis. Sed nequeunt esse tam ex una parte, quàm ex altera duo oppositi ambo recti; etenim omne quadrilaterum habens duos angulos utraque oppositione aequales est per Elemen. Geometr. parallelogrammum; Igitur necessario duo anguli oppositi erunt aequales duobus rectis; & non erit uterque rectus. Quaeritur autem trapetium; non parallelogrammum. Quod etiam esse minime potest; cum quatuor datae rectae lineae sint omnes inaequales. FIG. V.

Ponatur angulus in B obtusus; hinc illi oppositus in D. erit acutus.

Sint quoque ita latera AB. BC. CD. DA. collocata; ut summa quadratorum; quae ex AB. & BC. lateribus trianguli amblygonii ABC. conficiuntur; sit minor, quàm summa quadratorum, quae ex AD. & DC lateribus trianguli oxygonii ADC. constituuntur. Sit etiam in hoc triangulo latus AD minus la-

tere DC. Igitur ponatur latus AB. aequale datae rectae lineae AB. & latus BC. aequale datae rectae BC. & latus AD. aequale datae rectae DA. atque latus DC. aequale datae rectae DC.

FIG. IV. & V.

Nunc. Est quidem angulus ADC (*positione*) acutus. atque etiam (*positione*) acutus erit angul. ACD; cum sit latus AD. positum minus DC; unde angulus ACD. in triangulo ADC. non erit (*hypothesi*) rectus, aut obtusus. quare necessario acutus. demittantur ex A normales AG. supra DC. & AL. supra BL. cadet AG. intra DC. sed AL extra BC. Sint denominatae rectae datae AB. c. & BC. d. atque CD. a. & DA. b. Ignota vero BL dicta sit x.

FIG. V.

Similia sunt triangula ABL. & ADG; cum tam anguli ABL; ABC; quàm (*hypothesi*) ADG; ABC sint aequales duobus rectis. Inde erit ang. ABL aequalis ang. ADG. Et sunt anguli AGD. ALB recti. Hinc erit $AB . BL :: AD . DG$. scilicet $c . x :: b . \frac{bx}{c} = DG$. Quare $CG = CD - GD$ erit $= a - \frac{bx}{c} = \frac{ac - bx}{c}$. atqui est $AC^2 = AG^2 + GC^2 = AD^2 - DG^2 + GC^2$. quare erit $AC^2 = bb - \frac{bbxx}{cc} + aacc - 2acbx + bbxx = \frac{cbb + caa - 2abx}{c}$.

Est etiam $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BL$ [XII. 2. *Elem.*] $= cc + dd + 2dx$. Igitur erit $cc + dd + 2dx = \frac{cbb + caa - 2abx}{c}$. Et $c^3 + cdd + 2cdx = cbb + caa - 2abx$. Atque $2cdx + 2abx = cbb + caa - c^3 - cdd$. Inde habebitur analogia; $2ab + 2cd . bb + aa - cc - dd :: c . x$. atqui est c. data quantitas; & necessario maior x. Ergo etiam maior esse debet $2ab + 2cd$ quàm $bb + aa - cc - dd$; quae datae etiam sunt quantitates. Sed est reipsa $2ab + 2cd$ maior quantitas. quàm $bb + aa - cc - dd$ (*Construction. & Corollar. Lemmatis I.*)

Item

Item est $bb + aa$ maior quantitas quàm $cc + dd$. quare $bb + aa - cc - dd$ est excessus inter quantitatem maiorem, & minorem. Ergo si adinveniatur quarta Geometrica post $2ab + 2cd$; & $bb + aa - cc - dd$, atque c; erit illa aequalis x; sive BL. Et inventus erit valor ipsius x.

Componetur autem Resolutio sic.

Dicatur m comperta x. Sit latus $BC =$ datae rectae $BC = d$. producaturque BC ad L. Fiat $BL = m$. atque ex L educatur ad normam LA. Cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex data $AB = c$. & inventa BL constituuntur. Est quidem BL (*positione*) minor AB propter angulum in L rectum. Coniungantur AB. & AC. Erit quidem triangulum ABC. datum ob latus $AB = c$. & $BC = d$. (*constructione.*) Atque ob latus AC; quod datum, & inventum est per id quod ponebatur. Etenim est $CA^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BL$. Invenitur igitur CA per ignotam BL determinatam. Et erunt in ipso triangulo duo latera omni modo accepta maiora reliquo; cum positum ABC triangulum fuerit. FIG. IV. & VI.

Deinde dabitur quoque triangulum ADC per $AD = b$. & $DC = a$ (*constructione*); & per dictam AC. Vnde dabitur per id, quod ponebatur. Quare anguli in A. & D. & C. erunt quales esse debent; si trapetium iuxta hanc solutionem Circulo sit inscriptum. duo vero latera in eodem triangulo ADC erunt quoque omnifariam accepta maiora reliquo; positum enim ADC. triangulum fuit. atque ambo triangula ABC. CDA. posita sunt conformare trapetium; quod Circulo sit inscriptum. Ergo ad datam rectam AC. datumque in illa punctum A. datus angulus CAD. constituatur. & sumatur $AD = b$. iungaturq; DC. erit $DC = a$ (*positione*); sed erat $AB = c$; atque $BC = d$. Igitur irregulare trapetium $ABCD$. ex quatuor datis rectis lineis performatum habemus; quod Circulo inscribatur. Id enim positum est. FIG. VI.

Describatur nunc circa triangulum ABC Circulus; cuius Centrum Q (v. 4. *Elem.*); circa autem omne triangulum Circulus

culus

culus describitur. Et per conversam propositionem vigesimae secundae lib. III. Elementorum; quae sane demonstrata est; pertransibit Circulus per quartum punctum *D*. Et circa quaesitum irregulare trapetium *ABCD*. erit Circulus *ABCD*. descriptus *Q. E. F.*

SCHOLIVM.

Vera est conditio problemati adposita; quòd ex quatuor datis rectis lineis; unde trapetium conflandum est; tres sint omnifariam acceptae maiores reliqua. Quoniam patet, in omni Figura quadrilatera esse tria latera necessario maiora reliquo omni-
FIG. VII. fariam accepta. Iungatur enim in Figura quadrilatera *FEPH* diagonalis *EH*. Est $EF. + FH > EH$. Inde $EF + FH + EP$ erit $> EH + EP$. Igitur longe magis $EF + FH + EP$ erit $> PH$. Et ita de reliquis casibus.

COROLLARIVM.

FIG. V.
Erat $CG = \frac{ac - bx}{c}$. quare erit $= \frac{ac - bm}{c}$. Inde quantitas positiva erit iuxta hanc solutionem. Quoniam est iuxta illam *a* maior *b*. Iam vero *c*. erit semper maior *m*.

PROPOSITIO II.

FIG. VI. Sint omnia; quae antea. Et positio eadem. Est quidem angulus *ADC*. in trapetii triangulo *ADC* acutus. itemque acutus *ACD*; cum sit latus *AD*. minus *DC*. uti propositione praecedenti dicebatur. Sed angulus *CAD*; propterea sane, quia latus *AD*. minus est *DC*, unde *DC*. maius latus subtendit angulum *CAD*; esse potest & acutus; & rectus; atque etiam obtusus in hac solutione. Itaque oportet illum determinare. Du-

Ducatur ex vertice D. perpendiculum DI. fupra bafim AC, Erit AC. ad CG. veluti DC. ad CI. Sed data eft AC. itemque cognita eft per folutionem CG. & quantitas eft pofitiva (*Coroll. antecedentis*). Et data etiam eft BC. Ergo dabitur CI. quae fi minor fit quàm AC. cadet perpendiculum DI. intus AC; & angulus CAD. erit acutus (femper quidem acutus eft ang. ACD; uti oftenfum eft). Si maior; cadet perpendiculum extra AC. ad partes A. cum angulus ACD. fit acutus; atque angulus CAD. erit tunc obtufus. Si vero CI. fit aequalis CA. tunc perpendiculum cadet in A; eritque ipfum idem latus DA. trapetii. Et angulus CAD. erit rectus. Et diameter defcripti Circuli obveniet trapetii latus DC. atque erit tunc CA. media Geometrica inter DC. & CG; fcilicet inter totam bafim; & fegmentum bafis; quod ipfi adiacet CA. id quod triangulo rectangulo convenit; ex cuius angulo recto A. perpendicularis AG. ad bafim immittitur. EADEM FIG.

Igitur definita erit natura anguli CAD. in hac folutione; in qua [*propof. I.*] angulus ACD. adfumptus fuit acutus. Sed & effe poteft obtufus. Eft quidem in ipfa eadem folutione angulus ADC. neceffario acutus. Determinandi igitur funt hoc etiam in cafu tum ipfi anguli; cùm etiam pofitus laterum datorum trapetii.

Itaque ponatur in eadem folutione angulus ACD. obtufus; eritque femper ADC. acutus. Ergo latus AD. maius tunc effe debet latere DC. Hinc datarum rectarum $AD = b$. & $DC = a$. ex quatuor datis; unde componendum eft trapetium; & quae duae conftituere debent trapetii latera AD. & DC, fumatur maior a. cui fit aequale latus AD. & minor b. cui fit aequale latus DC. & perpendiculum AG. cadet extra DC. ad partes C. Eademque fiant; quae in Propofitione I. quod fpectat ad Problema: & eadem obtinebitur; quae ibi; analogia; atque CG fiet $= \frac{bc + am}{c}$. FIG. VIII.

Vnde quantitas quidem erit pofitiva.

Angulus CBD. erit fane neceffario acutus. Item ob figuram infcriptam; erit tum neceffario acutus BAD. oppofitus BCD. qui neceffario erit obtufus; fi obtufus ACD. Coniugatur diagonalis

BD trapetii. Atque ſumatur triangulum *BAD*. erit angulus *ABD*. = *ACD*. Et inde erit obtuſus. Erat vero acutus *BAD*. Et acutus erit *ADB*. [*conſtruct.*] cum ſit in hac ſolutione ſemper acutus *ADC*. Et ſane latus *AD*. accipitur in eadem ſolutione maius ſemper latere *AB*. (*prop. I.*) provenietque diagonalis *BD*. minor *AD*. Item centrum *Q*. circuli circumſcripti manere debebit extra triangulum *ACD*. hoc caſu. Et inde extra *BD*. Et ob triangulum etiam *BAD*. non acutiangulum; ſed obtuſiangulum in B. manet idem *Q*. extra *BAD*. ideoque pariter extra *AD*.

Modo in duo triangula *ABC*. *ADC*. dividitur noſtrum Trapetium. Eſt triangulum *ABC*. amblygonium. cuius inveniuntur, & dantur per conſtruction. anguli *ABC*. obtuſus; & *BAC*. atque *BCA*. acuti. Cum vero detur obtuſus *ABC*. datur etiam illi oppoſitus acutus *ADC*. in altero triangulo acutiangulo *ADC*. In quo determinati, & dati quoque per conſtructionem erunt alii duo anguli *ACD*. & *CAD*. ſive *CAD*. acutus ſit; ſive obtuſus; ſive rectus; in caſu nempe; quo angulus *ACD*. non ſumatur in ſolutione obtuſus. (*propoſ. anteced.*) Cum vero *ACD*. accipitur obtuſus; erit neceſſario *CAD*. acutus; ſed & etiam per conſtructionem datus. quae ex ſuperioribus conſectantur. atqui; datis, & cognitis angulis *BAC*; & *CAD*; uti & *BCA*. atque *ACD*. dantur quoq; toti *BAD*. & *BCD*. Ergo anguli omnes in noſtro trapetio ſunt determinati.

FIG. VI. & VIII.

P R O P O S I T I O III.

Sint quae antea. Sed ex quatuor datis rectis lineis duae ſint aequales, & duae inaequales. Oportet quidem, ut tres omnimodo ſumptae ſint maiores reliqua. Et tres ſunt caſus Figuris IX. X. XI. repraeſentati. Eadem erit ſolutio; modo trapetii circulo inſcribendi latera apte, conguenterque mutuo ſtatuantur iuxta imperata.

Si caſus ſit Figurae IX. poſſet (*per dicta*) triangulum *ADC* conſtitui Iſoſceles; exiſtente angulo *ACD*. acuto; eſt autem ſemper *ADC*. acutus in hac ſolutione. Igitur utrumque latus *DA*. & *DC*. ſive recta *b*. & recta *a* fieret = 4. Et recte ſolutio conſiſteret. Quoniam 16 + 16. neceſſario eſt hoc caſu

FIG. VI. FIG. IX.

9

$> 9 + 4$. Et tunc; cum efficeretur $a = b$; analogia propositionis primae redderetur $2cd + 2aa . 2aa - cc - dd :: c . m$. Sed (*Coroll. Lem. I.*) & uti patet est; $2cd + 2aa$ maior quàm $2aa - cc - dd$. atq; esset $AB = c = 3$; & $BC = d = 2$. sive $AB = c = 2$ & $BC = d = 3$. & hoc casu semper foret $aa > cc$. & $aa > dd$. Vnde esset $2aa > cc + dd$. Et quantitas idcirco esset positiva $2aa - cc - dd$. Ergo patet, quòd proponitur. Posset sane idem triangulum ADC. non deligi Isosceles; FIG. VI. sed cuius sit latus alterutrum $= 4$. & alterum $= 3$. (*proposit. I. & II.*) Et probe quoque solutio per superiùs effecta absolveretur.

In casu; quem commostrat Fig. x. posset triangulum obtusiangulum ABC. Isosceles adsumi. Itaque esset $AB = c = 8$. FIG. VI. pariterque $BC = d = 8$. Et proba maneret solutio. Nam $64 + 64$. necessario est hoc casu $< 81 + 169$. Itaque analogia propositionis primae evaderet $2cc + 2ab . bb + aa - 2cc :: c . m$. Est (*Corol. Lem. I.*) $2cc + 2ab$ maior quàm $bb + aa - 2cc$. Etesset $AD = b = 9$. atq; $CD = a = 13$. sive $AD = b = 1$,. Et $CD = a = 9$ [*propos. I. & II.*] Atq; hoc casu semper foret $bb + aa > 2cc$. Ergo $bb + aa - 2cc$ quantitas esset positiva. Posset quidem idem triangulum ABC. non constitui Isosceles; sed cuius alterutrum latus $= 8$. & alterum $= 9$. iuxta ea, quae in antecedentibus iussa fuere. Et solutio rite, ac rectè perficeretur per quae hactenus sunt pertractata. Quod vero spectat ad perquirendos angulos trapetii in omnibus tribus casibus huius propositionis; & in illis; in quibus aut triangulum ABC. aut ADC. sit Isosceles; simili ratione peragendum est, ac in Propositione II.

Quartus esset etiam Casus; si duae rectae forent inter se aequales, & duae aequales inter se. Verum; modo duo latera opposita; & duo opposita non locentur aequalia; esset enim tunc parallelogrammum; similis erit solutio. Nam esse deberet (ex dictis) in triangulo ABC. amblygonio latus $AB = BC =$ (*ex. caus.*) 3. Et in triangulo oxygonio ADC. esse latus $AD = DC =$ (*exem. caus.*) FIG. VI.

5. Et eſt quidem $9 + 9 < 25 + 25$. Vnde recta ſervaretur analogia propoſit. primae; quae tunc eſſet $2cc + 2aa . 2aa - 2cc :: c . m$. Eſſet enim primus terminus maior ſecundo. (*Coroliar. Lemm. I.*) & per ſe patet, atque $2aa$ maior $2cc$. quare $2aa - 2cc$ quantitas eſſet poſitiva. Et duo dicta triang. forent aequicruria. Hinc; cum in triangulo ADC foret $DA = DC$. eſt vero angulus in D. acutus in hac ſolutione; obvenirent ſemper neceſſario acuti alii duo in C. & A. Item totus angulus BAD. eſſet aequalis toti BCD. Et uterque; ob figuram inſcriptam Circulo; rectus. Et reliqua ſicuti in praecedentibus.

PROPOSITIO IV.

SInt datae quatuor rectae lineae; quarum tres aequales. Et idem quaeratur. opertetque ſemper; ut tres omnifariam acceptae ſint maiores reliqua. qua de re duo ſunt caſus Figurarum XII. & XIII. & eadem quoque erit ſolutio; & conſtructio; conſtitutis inter ſe trapetii lateribus; ſicuti in antecedentibus praeceptum eſt. In caſu autem; quem exhibet Fig. XII. erit neceſſario; non quidem ut lubebit; (*ex dictis*) triangulum ADC

FIG. VI. Iſoſceles. Itaque erit $AD = b = 5$. Et $DC = a = 5$. atque $AB = c = 5$. & $BC = d = 3$. vel $AB = c = 3$. & $BC = d = 5$. Eſtque ſane hoc caſu ſemper $25 + 25 > 25 + 9$. atque angulus ACD foret neceſſario acutus. Semper autem acutus ADC. Analogia vero propoſitionis primae fieret $2aa + 2ad . 2aa - dd :: a . m$. Et neceſſario hoc caſu ſemper a maior erit quàm d. Vnde $2aa - dd$ quantitas eſt poſitiva. Liquet vero; (*& Coroll. Lemm. I.*) eſſe $2aa + 2ad$ quantitatem maiorem quàm $aa - dd$. Ergo recta erit ſolutio. Et reliqua ſicuti in praecedentibus conficientur.

FIG. VI. Deinde in caſu Figurae XIII. triangulum obtuſiangulum ABC. neceſſario non arbitratu erit etiam ex dictis Iſoſceles. Igitur ita locentur latera; ut ſit $AB = c = 12$. & $CB = d =$

12

12. Atque $AD = b = 12$. Et $DC = a = 15$, iuxta supra imperata. Et est hoc casu semper $144 + 225 < 225 + 225$. atque praedicta analogia evadet $2ab + 2bb . aa - bb :: b . m$. Sed profecto $2bb + 2ab$ maior est quantitas quàm $aa - bb$. (*Coroll. Lemm. I.*) Item ab est semper hoc casu maior aa; & magis $2ab$ maior erit aa; atque multo magis $2ab + 2bb$. maior erit $aa - bb$. Postea (*constructione*) est a maior b. quare aa erit maior bb. Et $aa - bb$, quantitas erit necessario positiva.

Itaque recte perficietur eadem Problematis solutio. Quod ad id autem, quod spectat investigationem angulorum trapetii in ambobus casibus huius propositionis; pariter etiam praestandum id est, quod in propositione secunda.

COROLLARIVM.

Perspicuum est; si ex quatuor datis rectis lineis, quae trapetium componant; duae, aut tres sint aequales; faciliùs quibusvis casibus (*Proposition. III. & IV.*) succedere Problema. Etenim inventa analogia; per quam sola quarta Geometrica quaerenda est; paucioribus terminis tunc comprehendetur. Liquet autem, non omnes datas rectas lineas; ex quibus constituatur trapetium; esse posse aequales. Figura enim quadrilatera; cuius omnia latera sint aequalia; est parallelogramma. (*per* XXXIV. *lib.* 1. *Elem.*)

Igitur; quod ex antecedentibus consequitur; circa quodvis trapetium irregulare; cuius nempe nulla latera sunt parallela; potest Circulus describi. De regulari nunc; cuius scilicet duo latera opposita sunt parallela; alia vero minime; inquirendum est.

PROPOSITIO V.

EX quatuor datis rectis lineis quibusvis $A. B. C. D$; oportet regulare trapetium componere. FIG. XIV.

Profecto irregulare trapetium ex quibusvis datis rectis lineis sine problemate conformatur.

FIG. XV. & XVI. Si constitutum quaesitum trapetium fuerit $MPQN$. cuius latus $MP = A$. & $PQ = B$. atque $QO = C$. & $OM = D$. fueritque latus MO parallelum PQ; & ducatur ex extremo puncto Q lateris PQ, parallela QN. lateri MP. occurrens MO in N; erit necessario dissectum trapetium in parallelogrammum $MPQN$. & triangulum QNO. Quoniam Figura quadrilatera est; & latera duo opposita habet parallela. Item triangulum ipsum QNO. constabit ex tribus datis rectis lineis; idest; ex una QN aequali lateri uni trapetii A. ex altera QO; aequali lateri eiusdem trapetii C; atque ex tertia ON aequali excessui inter alia duo trapetii latera; quae sunt parallela; nempe inter D.
FIG. XV. & XVI. sive OM. & B. sive PQ, aut MN. vel inter B. sive PQ; aut MN. & D. sive MO. Ergo; si datae quatuor rectae lineae compositurae trapetium eae sint, ut duae ex nuper dictis tribus rectis lineis QN. NO. OQ. trianguli QON sint omnifariam sumptae maiores
FIG. XV. & XVI. reliqua; problema possibile est; Si non maiores; problema nequaquam erit possibile. Et positis datis lateribus duobus MO. & PQ. parallelis; quae iungant tertium datum latus MP; non adtinget quartum datum QO ad MO in O. aut nullo alio modo quatuor data latera in regulare trapetium poterunt aptari. Sit quidem propositum id problema possibile.

FIG. XV. & XVI. Ex datis tribus rectis lineis $OQ = C$; & $QN = A$. atque ON; quae aequalis sit praedicto excessui dato; constituatur triangulum QON. Postea efficiatur NM in ON aequalis datae rectae B. atque ex Q agatur QP parallela, & aequalis eidem rectae B. Iungatur MP. Erunt ob aequales, & parallelas NM; & QP; rectae lineae illas ad easdem partes conjungentes PM. & QN aequales & parallelae. Igitur erit $MP = QN = A$. & est $QO = C$. & $PQ = B$. (*constructio*)

FIG. XV. Atqui; Cum sit $ON = D - B$; scilicet $ON = MO - MN$ (*constructio*.); erit $D - B = MO - ON$; aut cum sit

ON

$ON = B - D$; scilicet $ON = MN - MO$ (*constr.*); erit $B - D = MN - MO$. Et est utroque casu $MN = PQ = B$. Ergo erit utroque casu $MO = D$. Sed sunt parallelae MO; & PQ pariter per fabricam. Igitur regulare trapetium ex quatuor datis rectis lineis $A. B. C. D.$ nobis comparavimus $Q. E. F.$ FIG. XVI.

PROPOSITIO VI.

EX quatuor datis rectis lineis $AB. BC. CD. DA.$ trapetium regulare constituere; quod Circulo inscribatur. Debent quidem aut duae, aut tres esse aequales. (*Lemm. II.*) Item oportet; ut tres omnifariam acceptae sint maiores reliqua; atque etiam; ut duae; quae non erunt parallelae; cum recta linea, quae est excessus parallelarum; sint omni modo sumptae reliqua maiores. (*Propositione V.*). FIG. XVII.

Sit quaesitum trapetium $ABCD$. cuius duo latera opposita parallela sint $AD. BC$. Erunt AB. & CD. alia duo opposita aequalia. (*Lemm. II.*) Ponatur autem angulus ABC. obtusus. Eritque ADC. acutus. Insunt autem duo anguli oppositi necessario aequales duobus rectis propter Figuram Circulo inscriptam; & non uterque rectus. Quod initio propositionis primae ostensum, & explicatum est. Sed est angulus BAD. aequalis ADC. propter parallelas; & inscriptam figuram; ob quam est angul. $ABE = ADC$. Ergo erit etiam ABC angulus aequalis DCB ob eamdem inscriptam Figuram. Inde obtusus erit angulus DCB. ducatur ex A parallela AH ipsi DC. occurrens BC in H. Agatur etiam norma AL supra BC. cadet AH extra CBL; cum sit parallela ipsi DC; & angulus DCB; sive DCH sit obtusus. FIG. XVII.

Nunc. Erunt; uti praemonebamus; duae datae rectae linae, aut tres necessario aequales. Itaque casus sunt omnes iidem ac illi; qui Propositione III. & IV. continentur. atqui in illis una

dua-

duarum ex datis quatuor rectis lineis est semper maior altera.
FIG. XVII. Quare ita latera huius trapetii aprata ponantur; ut parallela AD. sit maior altera sibi parallela BC. Inde dictus supra excessus (*proposit.* V.) in adposita conditione semper obtinebitur. Erat vero AB aequalis statuta DC. Tandem connectatur diagonalis AC. quae necessario trapetium in duo triangula dispertiet.

Sint datae AB; seu $DC = c$. & $AD = b = HC$. atque $BC = d$. Ignota vero BL sit $= x$. Erit (per positionem) $LH, = HC - LB - BC = b - x - d$. Sed est $AL^2 = AB^2 - BL^2 = cc - xx$. Et etiam $AL^2 = AH^2 - LH^2$. Quare erit $cc - xx = cc - bb - xx - dd + 2bx + 2bd - 2dx$. Igitur erit $2bx - 2dx = bb + dd - 2bd$. atque erit $2b - 2d. b - d :: b - d. x$. Estque [*constructione*] b maior d. Igitur tertia Geometrica accipiatur post $2b - 2d$. & $b - d$. cui in BC. abscindatur aequalis BL. extra BC. Extollatur ad normam LA; cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex AB; & inventâ BL conficiuntur; est vero AB. maior [positione] quàm BL. Iungatur AB. atque ex A ducatur AD parallela ipsi BC; & aequalis b. adiungatur C. ad punctum D. Provenientque in triangulo ADC; uti & in triangulo ABC. duo latera omnifariam sumpta maiora reliquo per positionem. Posita nimirum sunt constituta triangula. Ergo compositum regulare trapetium erit $ABCD$. ex quatuor rectis lineis datis; quod Circulo inscribatur. Id enim positum est: atque si per conversam vigesimae secundae lib. III. Elemen. iam demonstratam
FIG. XVIII. descriptus Circulus sit circa triangulum ABC; perducetur ille per quartum punctum D; Et inscriptum capiet trapetium exoptatum. *Q. E. F.*

PROPOSITIO VII.

FIG. XVIII. QVaeruntur anguli in regulari trapetio; circa quod Circulus descriptus. Sint omnia quae antea. & eadem Fig. XVIII. Datur

tur quidem, & noti fiunt per constructionem oppositi anguli *ADC*. & *ABC*. Inde per ea; quae praecedenti propositione ostenduntur; extant cogniti anguli *BAD*; & *BCD*. cum ille demonstratus ibi fuerit aequalis angulo *ADC*. iste vero aequalis angulo *ABC*. Sed dantur per construtionem anguli *BAC* & *BCA*. Ergo cognitos etiam adsequemur angulos *CAD*. & *ACD*. Igitur angulos omnes perspectos habebimus inscripti Circulo trapetii.

Deinde *AD*. datum est quidem maius latere *BC*. [*proposit. praecedenti*] potest vero esse maius; vel minus latere *DC*. Etenim inscriptum trapetium hoc regulare intus Circulum complectitur; veluti dictum est; [*praecedenti proposit.*] casus omnes propositionis III. & IV. cum duo latera sint necessario aequalia. Quare in illis casibus; quibus una inaequalium datarum rectarum; qualis est *AD*; est minor una aequalium; qualis *DC*. erit latus *AD* minus *DC*; iis autem casibus; quibus una inaequalium; uti *AD*; est maior una aequalium: qualis *DC*; erit latus *AD*. maius *DC*. FIG. XVIII.

Ergo si latus *DC* foret maius *AD*; posset quidem in trapetio regulari, haud secus ac in irregulari inscripto Circulo (*propositione II.*) esse hac parte angulus *CAD*. acutus; rectus; & obtusus. At vero angul. *BAD*. in trapetio regulari inscripto intus Circulum est necessario aequalis angulo *ADC* (*per antecedentem*). Sed *ADC*. est angulus necessario acutus. Ergo & *BAD*. necessario erit acutus. Ergo acutus necessario semper ipse angulus *CAD* erit. Hinc etiam semper obtusus erit angulus *BCD*. Et quidem demonstratur (*per eamdem*) ipse *BCD*. aequalis *ABC*. qui erat obtusus. Si datus ang. *CAD*. sit rectus; obveniet trapetii latus *CD*. diametrer ipsius Circuli. Sunt igitur anguli huius trapetii omnes definiti. *Q. E. F.*

SCHOLIVM.

Manifestum est; Si ex quatuor datis rectis lineis; quae regu-

lare

EADEM FIG. XVIII. lare trapetium componere debent Circulo inſcridendum; duae ſint aequales; aliae duae inaequales; neque triangulum *ABC*. neque *ADC*. fore Iſoſceles. cum oppoſita latera *AB*. *DC*. ſtatui aequales debeant. qua ratione datae rectae duae aequales inter ſe; & duae inter ſe aequales eſſe nequeunt. Nam quadrilaterum foret parallelogrammum. Et quidem analogia propoſitionis IV. non conſiſteret. Igitur quicunque ſint caſus propoſit. III. non erit in hoc trapetio triangulum ullum Iſoſceles. Si vero ex datis lineis tres ſint aequales; qui duo eſſe poſſunt caſus (*propoſitiones IV.*) erit Iſoſceles triangulum *ABC*; ſi caſus ſit Figurae XIII. ipſius propoſitionis IV. ſed erit Iſoſceles *ADC*. ſi caſus ſit Figurae XII. eiuſdem propoſitionis. Sunt enim in noſtro trapetio duo latera oppoſita *AB*. & *CD*. aequalia. Et utroque caſu analogia propoſition. VI. fieret $2c - 2d \cdot c - d :: c - d . x$. Nam $AD = b$ fieret $= AB = DC = c$. atque eſt quidem (*poſition.*) c major quàm d.

Eſt regulare trapetium aliud Iſoſceles; quod latera duo; quae non ſunt parallela; habet inter ſe aequalia: & aliud ſcalenum; cuius eadem latera ſunt inaequalia. Et inde nulla aequalia. Sed colligitur ex propoſitione VI. circa quodvis trapetium regulare; ſiquidem latera data aptari ad trapetium poſſint (*propoſit. V.*); & duae datae rectae non ſint aequales inter ſe; & duae inter ſe aequales; circulum deſcribi; atque [*Corollario propoſit. IV.*] circa quodvis trapetium irregulare deſcribitur quoque circulus. Igitur circa quodvis trapetium tum irregulare, cum regulare Iſoſceles (*Lemmat. II.*); et ſi duae datae lineae non ſunt aequales inter ſe; & duae inter ſe aequales; Circulus poteſt deſcribi.

TAB. II.

PROPOSITIO VIII.

FIG. XIX. SIT datum trapetium *AEHC*. oportet illud circa Circulum deſcribere. aut ſint datae quatuor rectae lineae *AE*. *EH*. *HC*. *CA* non omnes aequales; oportet ex illis trapetium componere,

nere, & circa Circulum deſcribere. Sunt quidem tres omni modo acceptae maiores reliqua.

Ponatur eſſe $AEHC$. datum trapezium iam conſtitutum; & circa Circulum Q. deſcriptum. aut ponatur ex datis quatuor rectis lineis non omnibus aequalibus AE. EH. HC. CA. eſſe compoſitum trapezium $AEHC$. & circa Circulum Q. deſcriptum. Igitur contingant Circulum latus AC. in B. & latus AE. in D. Et latus EH. in F. Et latus HC. in G. Erit $AB = AD$. Et $DE = EF$: atque $BC = CG$. & $GH = FH$. quare erit $AB + EF = AD + DE$. Et $BC + FH = CG + GH$. Ergo erit $AB + EF + BC + FH$; ſcilicet $AC + EH = AD + DE + CG + GH$; ſcilicet $= AE + CH$.

Aliter per algorithmum. Quoniam denominetur N. latus AB. Igitur erit $AD = N$. Inde DE erit $= AE - N$. Quare EF erit etiam $= AE - N$. Ergo habebitur $FH = EH - AE + N$. pariterque HG erit $= EH + AE + N$. & $CG = HC - EH + AE - N$. Sed eſt quoque $CG = BC = AC - N$. Igitur erit $HC - EH + AE - N = AC - N$. Inde $HC + AE$ erit $= AC + EH$. Sicuti antea. Conſentit igitur reliqua Geometria cum algorithmo demonſtrato.

Itaque ita trapezium datum ſit; aut ex quatuor datis rectis lineis ita conſtitutum ſit; ſi circa Circulum Q. deſcribi debeat; ut duo oppoſita latera ſimul accepta aequalia ſint duobus oppoſitis ſimul acceptis. Sive latera omnia ſint inaequalia; ſive duo aequalia; & duo inaequalia; aut duo aequalia inter ſe; & duo inter ſe aequalia. quo caſu duo adjacentia latera AE. & EH. erunt aequalia; & duo adjacentia AC. & CH. aequalia; Cum duo oppoſita ſimul accepta latera eſſe debeant (*ex dictis*) aequalia duobus oppoſitis ſimul acceptis. Item quia ſecus; duo oppoſita latera eſſent aequalia; & duo oppoſita aequalia. quare quadrilaterum eſſet parallelogrammum; & non trapezium; quod quaeritur. atqui data ſunt trapezii latera magnitudine. Ergo; cum datus jam; & cognitus ſit illorum mutuus poſitus; ſi trapezium

EADEM FIG.

C circa

circa Circulum sit describendum; quod demonstratum est; erunt quoque dati angusi trapetii quatuor *A.* & *E.* & *H.* & *C.*

EADEM FIG. Itaque sit Circulus; cuius centrum *Q.*; circa quem ponatur descriptum datum trapetium *AEHC*. Ex *Q.* agantur normales *QD.* ad trapetii latus *AE.* & *QF.* ad latus *EH.* atque *QG.* ad latus *CH.* & *QB.* ad latus *AC.* Iunganturque *EQ.* & *CQ.* Erunt (*hypothesi*) aequalia triangula *EQD.* & *EQF.* atque *CQB.* & *CQG.* Inde angulus *DEQ.* obveniet aequalis angulo *FEQ.* Et angulus *BCQ* aequalis *GCQ.* Igitur dividatur bifariam datus angulus *AEH.* à recta *EQ.* & bifariam datus augulus *ACH.* à recta *CQ.* Convenient *EQ.* & *CQ.* in puncto. quod sit *Q.* Ex *Q.* ducatur una normalis *QD.* ad latus trapetii *AE.* aut *QF.* ad latus *EH.* aut *QG.* ad latus *HC.* aut *QB.* ad latus *AC.* Vnum enim, idemque est. Et centro *Q* intervallo *QD.* aut *QF.* vel *QG.* aut *QB.* describatur Circulus. Erit is quaesitus. Id enim positum est; cum unum, idemque positum fuerit punctum *Q.* Circuli centrum tam pro normali *QD.* aut *QF.* quàm pro normali *QG*; aut *QB.* atque unum idem *Q.* fuerit punctum concursûs duarum *EQ.* & *CQ.* ductarum per id, quod trapetium circa Circulum positum fuerit descriptum. *Q. E. F.*

S C H O L I V M.

Nequeunt ex quatuor dati trapetii iam constituti lateribus esse tria aequalia. aut si datae quatuor rectae lineae sint constituturae trapetium; nequeunt tres esse aequales; debent enim [per demonstrata] latera duo opposita simul accepta esse aequalia duobus oppositis simul acceptis.

Analysis haec omnes solvit casus; vel trapetium circa Circulum describendum irregulare sit; vel regulare Isosceles; aut Scalenum. atque si duo latera *AE.* & *EH.* aequalia sint inter se; & duo *CA.* *CH.* aequalia inter se; erunt anguli oppositi *EAC.* & *EHC.* aequales.

In-

Intus Circulum vero datum; aut circa Circulum datum describere trapetium; quod quidem minime esse potest datum; duo enim sola latera data esse possunt; problema est facillimae solutionis.

PROBLEMA II. GEOMETRICVM.

PROPOSITIO.

PROBL. II.

SIT data Elipsis $GDLF$. Cuius diameter positione data GL. FIG. 1. & Centrum O. Quaeritur punctum in Curva A. unde si ordinetur AB; atque ducatur Tangens AT occurrens diametro in T; fiat excessus inter quadratum ex GL. & rectangulum ex GO in GB; ad excessum quadratorum GL. & GB; veluti GL una cum GB ad subtangentem TB.

Sit punctum A in curva quaesitum: & ordinatim adplicetur AB: atque ducatur Tangens AT conveniens cum diametro GL in T. Est per doctrinam Conicorum $LB . BG :: LT . TG$. (XXXIV. *lib.* 1. *Conicor. Apollon.*) Inde erit $BO . BL :: GB . TB$. Etenim dicatur GL; c. & sit $GB = x$. Igitur erit $LB = c - x$. atqui est per dictam propositionem; $c - x \cdot x :: LG + GT . TG$. quare erit $c - x - x \cdot x :: LG + GT - TG \cdot TG$ scilicet; $c - 2x \cdot x :: c . TG$. Et inde $TG = \frac{cx}{c - 2x}$

Quare TB subtangens erit $= \frac{cx}{c - 2x} + x = \frac{2cx - 2xx}{c - 2x}$.

Inde erit $c - 2x \cdot 2c - 2x :: x \cdot TB$. sive $\frac{c}{2} - x$; nempe BO; erit ad $c - x$; seu BL; uti GB ad TB. *Q. E. D.*

Demonstratur aliter Synthetice. Nam erat $LB . BG :: LT . TG$. Quare erit $LB - BG$; ad $LT - TG$; sive ad LG; uti GB. ad TG. Hinc TG erit ad GB. sicuti LG. ad $LB - BG$. & $TG + GB$; nempe TB, erit ad GB; uti $LG + LB - BG$; ad $LB - BG$; sive uti $2LB$. ad $LO + OB - BG$; aut uti $2LB$ ad $GO + OB - BG$; nempe uti $2LB$; ad $2BO$; & in-

de TB ad GB erit uti $2LB$ ad $2BO$. seu $BO.BL :: GB.TB$.

Nunc; denominatis diametro GL; & abscissa GB; uti antea; erit subtangens $TB = \frac{2cx - 2xx}{c - 2x}$; per nuper demonstrata. Sed est [per positionem] $\frac{cc - cx}{2}. cc - xx :: c + x. \frac{2cx - 2xx}{c - 2x}$. Itaque si extrema duo mutuo ducta aequentur aliis duobus mutuo ductis; habebitur $c^4 - ccxx + c^3x - cx^3 - 2c^3x + 2cx^3 - 2ccxx - 2x^4 = 2c^3x - ccxx - 2ccxx + cx^3$. Inde composita aequatio erit $x^4 + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$.

Quae deinde construetur sic.

Inducatur parabola $ay = xx$. Igitur erit $aayy = x^4$. Et instructa aequatio reddetur $aayy + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$. Sive $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{aa} = 0$.

FIG. II. Nunc diametro DE. & parametro $= a$. describatur parabola KDI. Cuius vertex D. ducatur DH. parallela ordinatis parabolae KDI. Et in illa sumatur $DA = \frac{2c}{3}$; atque diametro AH; vertice extremo puncto A ipsius DA; parametro vero $= \frac{3c^3}{2aa}$; atque ordinatis parallelis ipsi DE sit descripta secunda Parabola BAC. Dico harum duarum parabolarum interfectiones praebere valores ignotae x. Duae interfectiones necessario sunt per descriptiones parabolarum; & non aliae. Sint autem interfectiones $M.M$. Vnde agantur ordinatae MO; & MP. ad Curvas. Sit MO dicta x. in angulo EDA; atque DO dicta y. Ordinatae nempe sunt, & abscissae parabolae primae.

Patet, primam parabolam KDI descriptam esse eam, quae inducta nova parabola est $ay = xx$. Nunc descripta CAB. secunda est parabola $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{aa} = 0$.

Nam

Nam ſumatur interſectio M in angulo EDA. Eſt $MP = DO = y$. atque $PA = DA - DP = \frac{2c}{3} - x$. ſed eſt MP^2 aequale rectangulo; quod ex AP in Parametrum efficitur. quare erit $yy = \overline{\frac{2c}{3} - x} \times \frac{3c^3}{2aa}$. Et inde yy erit $= \frac{c^4}{aa} - \frac{3c^3x}{2aa}$; Et $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{2aa} = 0$. Accipiatur nunc interſectio M in angulo EDH. atque eſt ibi etiam $MP = DO = y$. atque $PA = DA + DP = \frac{2c}{3} - x$. Eſt enim DP in plaga averſa $= - x$. Vnde eadem provenit aequatio. Sed in utraque curva ſunt eaedem y; & eaedem & x. Ergo ſufficiatur $\frac{x^4}{aa}$ parabolae primae loco yy in parabola ſecunda. Et proveniet aequatio, quae erat conſtruenda $x^4 + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$.

Et cum duae ſint neceſſariae interſectiones Curvarum $M.M.$ duae ſunt radices aequationis poſſibiles. Deeſt vero in ipſa aequatione aliquis terminus; Ergo per algorithmum radices in illa ſunt verae falſis mixtae. Vnde una radix vera erit poſſibilis; altera & poſſibilis falſa. Erat MO in angulo poſita $EDA = + x$. Inde erit oppoſita $MO = - x$. ambae vero DO. ſunt $+ y$.

Itaque ſumatur GB ſuper diametro GL aequalis $MO + x$. Erat enim in analyſi $GB = + x$. Ex B ordinatim adplicetur ad Ellipſim recta BA. Et ducta ex A. tangens AT. conveniet cum ipſa diametro in T; ita ut ſubtangens TB. quarta ſit in proportione Geometrica poſt $GL^2 - GO \times GB$. & $GL^2 - GB^2$. atque $GL + GB$. Id enim poſitum eſt. FIG I. & II.

Iam vero demonſtratum eſt, eandem obvenire aequationem conſtructam; quae ſane eadem eſt cum inventa: ſi adſumatur $- x$. Ergo accipiatur ſuper eadem diametro GL in parte averſa; nempe ex L verſus G portio $LE = MO (= - x.)$ poſitae FIG II.

con-

FIG. I. contra primam acceptam $MO + x$. Et ordinetur ad Ellipsim recta ED. atque ex D. fiat DP curvae tangens; concurret DP. cum diametro GL in P. ita ut subtangens PE. sit quarta pariter Geometrica post $GL^2 - LO \times LE$. & $GL^2 - LE^2$; atque $GL + LE$. id enim positum est. Q. F. O.

S C H O L I V M.

In inventa aequatione deest secundus terminus; unde summa radicum verarum erit aequalis summae falsarum. Sed etiam deest terminus tertius. Igitur coëfficiens termini tertii affectus signo — nequit scilicet esse minor tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini secundi. aut productum ex ultimo termino in coëfficientem tertii; si afficiatur illud signo —; esse minus tribus octavis partibus quadrati; quod ex coëfficiente constituatur termini quarti. Quae ambae necessariae conditiones severe in algorithmo demonstrantur; & nostram nos habemus demonstrationem; quibus; si alterutra earum desit; radices procul dubio erunt aut aliquae, aut omnes in aequatione quarti gradus fictitiae. In nostra vero aequatione ambae conditiones desiderantur. Hinc (*per algorith.*) inerunt in illa radices impossibiles. Sed duae non omnes. duo enim puncta necessario dantur concursûs Curvarum per descriptionem; sicuti dicebatur. Vnde duae; quae sunt radices; sunt possibiles. Ergo descriptio curvarum Geomtrica respondet algorith.°

Tum idem algorithmus demonstrat; si aliquo orbata sit aequatio termino; qualis haec aequatio eadem fuit; adesse in illa veras radices cum falsis commixtas. Et descriptio duarum harum curvarum; quae ipsam eamdem construit aequationem; duas FIG. II. habet MO. satisfacientes problemati; locatas in positu contrario; unde radices verae, & falsae aequationum algebricarum originem ducunt. Ergo ratum, constansque per haec sit quod de praedictis conditionibus, & de mixtione dicta radicum verarum, & falsarum algebrica demonstrat Geometria.

PRO-

PROBLEMA III. ARITHMETICVM.

SIT propofitum problema; duos numeros invenire; ex quorum quadratorum additione deducta latera faciant 78. & fi illis mutuo ductis addantur eadem latera; progignatur 39.

Sit dictus unus z. alter x. Erit ob unam conditionem $zx + z + x = 39$. Inde $z + zx = 39 - x$. Et $z = \frac{39 - x}{1 + x}$.

atque $zz = \frac{1521 - 78x + xx}{1 + 2x + xx}$. Sed ob alteram conditionem eft $zz + xx - z - x = 78$. quare erit; fi loco z. & zz fubftituti eius valores fuerint expofiti per x; aequatio $\frac{1521 - 78x + xx}{1 + 2x + xx} + xx - \frac{39 + x}{1 + x} - x = 78$. Et efficiatur multiplicatio per $1 + 2x + xx$. atque conformetur aequatio more confueto. & habebitur $x^4 + x^3 - 77xx - 273x - 1408. = 0$.

Habet 1404. diviforem 3. & comperta aequatio dividitur per $x - 3 = 0$. Eft igitur $x = 3$. Sed erat $z = \frac{39 - x}{1 + x}$.

quare erit $z = \frac{36}{4} = 9$. Sunt igitur duo numeri 3. & 9. & fatisfaciunt quaeftioni.

Sed; divifa inventâ aequatione per $x - 3 = 0$; remanet $x^3 + 4xx - 65x - 468 = 0$. Et 468 habet diviforem 9. atque haec ipfa aequatio dividitur per $x - 9 = 0$. remanetque $xx + 13x + 52 = 0$. Hinc erit etiam per hanc reductionem aequationis $x = 9$. Vnde $z = \frac{39 - x}{1 + x}$. erit $= \frac{30}{10} = 3$. Ergo habentur iidem duo numeri inventi.

Equatio $xx + 13x + 52 = 0$. nequit inferiùs deprimi; fed & duas habet radices fictitias. quod propter omnia figna + ; quae adfunt; Algebrae regulae demonftrant. Et quidem erit xx

$+ 13x$

$+13x+\frac{169}{4}=\frac{169}{4}-52=-\frac{39}{4}$. Igitur habebitur $x+\frac{13}{2}=\mp\sqrt{-\frac{39}{4}}$. Et duae erunt radices imaginariae ipsius x. scilicet $+\sqrt{-\frac{39}{4}}-\frac{13}{2}$. atque $-\sqrt{-\frac{39}{4}}-\frac{13}{2}$. Soli igitur duo numeri sunt aut rationales; aut irrationales; qui satisfaciunt quaestioni; 3. & 9.

PROBLEMA IV. GEOMETRICVM.

PROBL. IV.

PROPOSITIO I.

FIG. I. Sit datus ang. acutus ABD. cuius positione quidem datum sit latus BD. sed latus AB. magnitudine etiam datum. Quaeritur locus punctorum M; ita ut; iunctis rectis lineis MB. MA. quarum MA. secet BD in E; sit triangulum BME. semper constans; & datum.

Ponatur esse series punctorum M. M. quaesita. Agatur AF ad normam supra datam positione BD. Cadet (*hypothesi*) AF. inter B & D. Ex quovis puncto M. ponatur ducta MC ordinata supra BD. in dato angulo quovis obtuso MCB. atque ex A. ducatur AO. parallela MC. occurrens BD. in O. quae cadet extra BF. versus D. ob angulum in F. rectum; & angulum AOD. qui erit obtusus; cum sit MC. parallela AD. Ex eodem puncto M. sit ducta normalis MI. supra eamdem BD, quam patet cadere extra BC. versus D.

Dicantur datae, & cognitae $AF=b$. $AO=a$. $BO=c$. Et abscissae BC. sint $+x$. atque ordinatim positae CM sint $+y$. Sit vero constans triangulum, & datum $BME=dd$.

Est AO. AF :: MC. ML. sive a. b. :: y. $\frac{by}{a}=MI$;

Sed

Sed triangulum BME. est $= \frac{BE \times by}{2a}$. atque erat $= dd$. Inde erit $dd = \frac{BE \times by}{2a}$. Igitur $BE = \frac{2add}{by}$. atque $EC = BC - BE$ erit $= x - \frac{2add}{by} = \frac{byx - 2add}{by}$. Est etiam $OE = BE - BO = \frac{2add}{by} - c = \frac{2add - cby}{by}$. atqui (sumpto puncto M; unde ductae; uti supra; MC. MI.) similia semper erunt triangula AOE. MCE. quare AO. OE :: MC. CE. scilicet a. $\frac{2add - cby}{by}$ :: y. $\frac{bxy - 2add}{by}$. Ergo erit $2addy - cbyy = abxy - 2aadd$. Et performata more consueto aequatio efficietur $yy - \frac{2addy}{bc} + \frac{axy}{c} - \frac{2aadd}{bc} = 0$.

Quae hyperboles est asymptotica.

Componetur autem sic.

Abrumpatur in BD portio $BQ = \frac{2dd}{b}$. Ex Q agatur QK FIG. II. parallela AO; seu ordinatis loci quaesiti. Et sit in QK portio $QH = AO = a$. Ex H educatur HL parallela BD. Tum ex eodem Q agatur QXV. parallela AB. secans HL in L. Et cadet QXV intra angulum BQK. Erat enim ang. BQK aequalis AOD. & inde obtusus. atque erit angulus BQX aequalis ABD. Vnde erit acutus. Et datum est triangulum QLH; ob QH latus datum; & angulum $QHL = DQH = AOB$ dato. & angulum $QLH = BQL = ABD$ dato. Dicaturque $QL = m$.

Nunc efficiatur $QZ = QL = m$. ad partes D. Ex Z. agatur ZT. parallela QLX. Et fiat $ZT = BQ = \frac{2dd.}{b}$ deinde asymptotis QDR. & QXV describatur hyperboles TP; per punctum T. Erit ea limes quaesitus punctorum M.

Sit enim quodcumque M in Curva. Vnde ducantur MC. EADEM FIG.

parallela AO. & MI parallela AF. atque MN parallela AB; five QVX. quae cadent fupra BD pofitae ficuti in fchemate; propter dictam aequidiftantiam. Modo erit (*conftruction.*) AO. $OB :: MC. CN$. fcilicet $a \cdot c :: y \cdot \frac{cy}{a} = CN$. Sunt enim $BC = +x$. abfciffae; & $CM = +y$ ordinatae loci quaefiti. Atque femper erit $BN = BC + CN = x + \frac{cy}{a}$. & QN femper $= BN - BQ = x + \frac{cy}{a} - \frac{2dd}{b}$. Item ob triangula fimilia QHL. MCN. propter angul. $QHL = DQH = AOB$ [uti dictum] $= MCN$. & angulum $QLH = BQL = ABD$ (quod etiam dictum) $= MNC$; habebitur QH $QL :: MC. MN$. nempe $a. m :: y. \frac{my}{a} = MN$. fed funt QN. abfciffae; & NM. ordinatae Loci conftructi hyperbolici. unde $QN \times NM$. eft femper $= QZ \times ZT$; five $\overline{\frac{cy}{a} + x - \frac{2dd}{b}} \times \frac{my}{a} = \frac{2mdd}{b}$. Ergo; fi fiat multiplicatio; & condatur confueta forma aequatio; erit $yy + \frac{ayx}{c} - \frac{2addy}{bc} - \frac{2aadd}{bc} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Igitur erit in defcripta hyperbole Locus quaefitus. atque fi ex quovis eius puncto M ducantur lineae ad B. & A; quarum MA fecat BD. in E; erit triangulum BME femper datum; & $= dd$. Id enim pofitum eft. $Q. E. F.$

PROPOSITIO II.

FIG. III. I. Sint quae antea. Et Hyperboles fit oppofita SG. Poterit Hyperboles oppofita perducta effe per punctum A. datae pofitione, & magnitudine rectae Lineae AB. poterit etiam tota procedere extra AB. & poterit quoque illam fecare. Dico primo; aut permeet curva per A. aut fecet AB. aut tota extra AB ca-

dat; esse semper locum in eiusdem SG curvae punctis M; cuius ordinatae MC in loco quidem quaesito sunt $= - y$. Sed abscissae BC manent $= + x$. scilicet esse semper locum in ipsa hyperbole opposita respiciente plagam ex B versus D. positam.

Etenim sit punctum curvae quodvis M. in ea parte acceptum; unde ducantur; uti supra in loco quaesito; ordinata MC curvae; atque normalis MI: item ducatur AO. in angulo AOD obtuso; & perpendicularis AF. supra BQD asyptotum. Erit angulus BCM ordinatarum ea in plaga acutus; cum sint ordinatae parallelae (*construct.*) ipsi AO. Atque est quidem $BC = + x$. Sed $CM = - y$. Item si M est punctum in curva quaesitum; iunctis MB. MA; secabit MA datam positione BD juxta problema in puncto E. non intus BD. qualis MAe. sed ad partem BR. oppositam ipsi BD. quod liquet; secaret enim tunc ita recta MA; si duci posset; rectam BM; seu latus BM; ut non constitueretur triangulum $BMAE$; quod vult problema. Debet igitur illud constitui hypothesi conditionis problematis. Nunc per ea, quae effecta sunt in praecedenti; erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Sed EC est $= BC + EB = x + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - byx}{-by}$. atque $OE = BO + BE$ erit $= c + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - cby}{-by}$.

Inde; uti supra; habebitur proportio $a \,.\, \frac{2add - cby}{-by} :: -y \,.\, \frac{2add - byx}{-by}$. Quare erit $- \frac{2addy + cbyy}{-by} = \frac{2aadd - abyx}{-by}$.

atque $yy + \frac{ayx}{c} - \frac{2addy}{cb} - \frac{2aadd}{cb} = 0$. quae plane eadem aequatio est; quae supra inventa fuit.

Componetur autem Locus simili modo, quo in praecedenti. Nam sit acceptum quodvis punctum M in hyperbola descripta opposita in plaga respiciente asymptotum BD. ubi BC sunt $+ x$.

 Sed

Sed CM funt $-y$. Et agatur MC parallela AO. atque normalis MI. Et MN parallela AB; feu afymptoto QVX. Erit; uti in praecedenti; $CN = -\frac{cy}{a}$. atque $BN = BC - CN$ erit $= x + \frac{cy}{a}$. atque QN abfciffa loci conftructi erit $= BQ - BN = \frac{2dd}{b} - x - \frac{cy}{a}$. Eft vero $NM = -\frac{my}{a}$; ordinata loci conftructi. Atqui eft $QN \times NM = BZ \times ZT$. Quare habebitur $\overline{\frac{2dd}{b} - x - \frac{cy}{a}} \times -\frac{my}{a} = \frac{2mdd}{b}$. debet enim poteftas $\frac{2mdd}{b}$ curvae praefigi figno $+$; non figno $-$; cum in eadem plaga compofitus locus fuerit; ubi quaefitus. Ergo manet locus quaefitus; ubi determinatus eft. Et junctis ibi MB. MA. quae fecet BD in E; erit triangulum BME. femper datum; & $= dd$.

II. Dico fecundo; effe etiam locum in hyperbole refpiciente plagam BR afymptoti. Vbi angulus Ordinatarum BCM femper erit obtufus; cum fint ordinatae parallelae ipfi AO. (*conftruction.*) atque abfciffae, & ordinatae loci quaefiti fient $-x$; & $-y$. Oportet autem, ut punctum E. tunc cadat fupra BR. ad partes fcilicet curvae S; non vero ad partes curvae G; fupra
FIG. IV. & V. TAB. III. BD. Id vero femper accidet, fi hyperboles ipfa oppofita pertranfeat per extremum punctum A rectae datae AB; aut fecet ipfam AB. poteft enim & per A. perduci; & fecare rectam AB; & tota etiam extra illam prolabi; ut initio num. I. dicebatur.

Demonftratur. Pertranfeat curva per A extremum punctum rectae AB. aut fecet illam uti in P. Agatur ex A normalis AF fupra BD; veluti fupra in folutione, & compofitione problematis quoque efficiebatur. Et fi curva fecat AB; profecto; cum fit tunc
FIG. V. punctum A extra curvam; fecabit normalis AF ipfam eandem
FIG. IV. & V. curvam in K. Nunc funt AF. aut KF diftantiae curvae ab afymptoto

ptoto RQD in locis A. aut K. Et ; accepto puncto quovis M in curva; atque ducta ex M normali MI supra RQD; uti etiam fiebat in solutione, & constructione Loci; erit MI distantia curvae ab eodem asymptoto RQD in puncto quovis M. atqui per proprietatem curvae asymptoticae est distantia MI. semper minor distantia AF. & minor distantia KF; unde; & secundo casu multo magis; minor quàm normalis tota AF. Ergo per Element. Geometriae recta linea AME non parallela asymptoto RQD; occurret illi in E ad partes MI minoris quàm AF. & inde semper accidet; si hyperboles opposita pertranseat per extremum punctum A datae rectae AB; aut si secet AB; ut punctum E cadat semper supra BR ad partes curve S. non vero supra BD. ad partes curvae G. Et posita conditio loco, quô cadet punctum E. his casibus semper servabitur $Q. E. D.$ FIG. IV. & V.

Nunc. Sit punctum quodvis M inhyperbole opposita GS. respiciente plagam BR asymptoti. Vbi abscissae fiunt $-x$; itemque ordinatim positae sunt $-y$. Ex M. ducantur ut supra in loco quaesito MC. Ordinata Curvae, atque Normalis MI; item ducatur AO. in angulo AOD. obtuso. & perpendicularis AF. supra RQD asymptotum. eritque angulus ordinatarum BCM. obtusus; cum sint ordinatae parallelae ipsi AO (*Constructon.*) Cadet C. extra BD. ad partes R. Cum sint BC [*hypothesi*] $-x$. Quod est semper intelligendum in propositione sequenti; & in inquentibus. Sunt & ordinatae CM in his semper (*hypothesi*) $-y$. FIG. IV. & V.

Itaque si praestentur; quae in loco quaesito effecta sunt in propositione I. erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Inde $EC = EB - BC$ erit $= \frac{2add}{-by} + x = \frac{2add - byx}{-by}$. atque OE erit $= OB + BE = c + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - cby}{-by}$. Ergo analogia erit $a . \frac{2add - cby}{-by} :: -y . \frac{2add - byx}{-by}$. quare habe-

bebitur $2aadd - abyx = - 2addy + cbyy$. Atque $yy - \frac{2addy}{cb} + \frac{ayx}{c} - \frac{2aadd}{cb} = 0$. quae aequatio eſt plane ipſa eadem cùm ſupra inventa (*propoſit. I. & Num. I. huius*). Itaque eodem omnino modo conſtruetur ac illa tum in propoſitione I. tum in hac ſecunda n. I. Igitur erit etiam in ea hyperbole oppoſita GS. Limes ordinationum quaeſitus.

PROPOSITIO III.

FIG. VI. & VII. Sint omnia; quae antea. Sed cadat hyperboles oppoſita GS tota extra datam rectam AB. Iam vero pertractati duo caſus ſunt; quibus hyperboles haec oppoſita aut pervadit per A FIG. IV. & V. punctum extremum ipſius AB; aut ſecat AB; tumque oſtenſum eſt, eſſe ſemper illam locum quaeſitum; cadereque interſectionem E rectae MAE. & aſymptoti RQD ſupra BR ad partes cur- FIG VI & VII. vae S contra plagam QD. Ad hanc vero partem; ſed & ad aliam averſam; nempe ad partem curvae G verſus QD incidere quoque poſſet hoc caſu curvae percurrentis extra totam datam rectam AB interſectio eadem E. Itaque incidat interſectio E ad FIG. VII. & VIII partem curvae G verſùs QD. Et cadat aut extra BO. aut intra BO. ſemper enim conſtituetur triangulum BEM; quod vult problema; & iuxta conditionem problematis. Dico hoc caſu deſcriptam hyperbolem oppoſitam GS minime eſſe locum quaeſitum.

FIG. VII. Cadat enim hoc caſu interſectio E extra BO. Et; ſi fiant, quae in ſuperioribus; erunt abſciſſae loci quaeſiti ipſae $BC = -x$. atq; ordinatae $CM = -y$. Hinc erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Sed $EC = EB + BC$ erit $= \frac{2add}{-by} - x = \frac{2add + byx}{-by}$. atque $OE = EB - BO$ erit $= \frac{2add}{-by} - c = \frac{2add + cby}{-by}$. Igitur analogia proveniet $a . \frac{2add + cby}{-by} :: -y . \frac{2add + byx}{-by}$.

Et

Et $-2addy-cbyy$ erit $=2aadd+abyx$. atq; $yy+\frac{2addy}{cb}+\frac{abyx}{cb}+\frac{2aadd}{cb}=0$. quae non eſt aequatio ſupra inventa. Et ſi pro $EB=\frac{2add}{-by}$ accipiatur illi aequalis (*per algoritbmum*) $-\frac{2add}{+by}$; & efficiantur eadem; evadet aequatio $yy+\frac{2addy}{cb}+\frac{abyx}{cb}-\frac{2aadd}{cb}=0$, quae & ipſa nequaquam eſt aequatio ſupra in loco quaeſito comperta.

Cadat hoc eodem caſu interſectionis E cum aſymptoto BQD ad partem curvae G versùs QD; dum curva tota perlabitur extra rectam AB; punctum E interſectionis intra BO. Erunt, quae antea; ſolùm erit $OE=BO-BE=c-\frac{2add}{-by}=\frac{cby-2add}{-by}$. Et analogia erit $a.-\frac{2add-cby}{-by}::-y.\frac{2add+byx}{-by}$. Scilicet $+2addy+cbyy=2aadd+abyx$. ſive $yy+\frac{2addy}{cb}-\frac{2aadd}{cb}-\frac{ayx}{c}=0$. quae non fuit aequatio loci quaeſiti ſupra deprehenſa; & quae neq; proveniet; ſi uti nuper; pro $EB=\frac{2add}{-by}$ ſumatur $-\frac{2add}{+by}$. Sit nunc caſus Fig. VI.[ae] FIG. VIII.

Quare Curvae perductae extra totam datam rectam AB ſit punctum quodvis M acceptum; ſed M iuncto cum A. & B; atque protracta MA; punctum interſectionis E ipſius MA. & aſymptoti BQD incidat; ſi fieri poteſt; ad partes curvae S contra plagam QD. At; cum punctum A. maneat inter convexam curvam, & aſymptotum $QBRD$; ſecabit recta MA. neceſſario curvam in alio puncto K; aliter caderet tota extra curvam GS; & non adtingere poſſet ad A: aut eſſet curvae tangens in M; non quidem ſecans; FIG. VI.

con-

contra hypothesim. Hinc si K est curvae punctum; iunctis KB; & MB; foret triangulum EMB aequale triangulo EKB; Nam ob EMA. & M. Et K. curvae puncta esset (*hypothesi*) in sectione opposita $GKMS$ limes ordinationum quaesitus. Maximum autem absurdum; ea triangula provenire aequalia; cum basis EB sit communis; & altitudines MI, KI; nempe normales MI, KI demissae è curvae punctis ad asymptotum necessario esse debeant ob curvam asymptoticam inaequales. Igitur intersectio EG. curvae. hoc casu non posset cadere ad partes G S. contra plagam QD; & non erit in hyperbola opposita Locus.

FIG. VI. Aliter. Iam duo puncta demonstrata sunt M. & K. debere hoc casu esse intersectionum Lineae EMA; & curvae GS. si E. cadere ad partes G. curvae posset. Ducantur ex illis rectae MN. & MI. & MC. atque KN. & KI. & KC. sicuti in praecedentibus. Nunc tam pro puncto M. quàm pro puncto K. esset EC $= EB - BC = \frac{2add}{-by} + x = \frac{2add - byx}{-by}$. Tum esset OE $= OB + BE = \frac{2add}{-by} + c = \frac{2add - byc}{-by}$. Et analogia foret $a.\ \frac{2add - byc}{-by} :: -y;\ \frac{2add - byx}{-by}$. Hinc haberetur $-2addy + byyc = 2aadd - abyx$. Et $yy + \frac{ayx}{c}$ $- \frac{2addy}{bc} - \frac{2aadd}{bc} = 0$. Quae non est aequatio inventa. Itaque; non spectato etiam illo absurdo; nequaquam cadet intersectio E hoc casu ad partes G. curvae; ita ut esse possit in hyperbola opposita locus. atque semper Geometriam inter Syntheticam convenit, & Algebricam. Ergo; si sectio opposita GS loci hyperbolici inventi cadat tota extra datam rectam AB; nusquam habebit locum quaesitum Q. E. D.

SCHO-

SCHOLIUM.

In casu propositionis secundae num I. recta linea MAE determinata quemadmodum saepe dictum est; potest secare sectionem oppositam in uno puncto; & potest in duobus. In casu eiusdem propositionis num. II. si curva opposita pervadit per extremum punctum A datae rectae AB; ipsa EMA. minime secabit eandem curvam in alio puncto praeter M; secaret enim in tribus punctis curvam unam hyperbolicam recta linea; quod fieri nequit per Conicorum disciplinam. Si vero ipso eodem casu num. II. curva opposita secat eandem AB; uti in P; potest etiam & in alio secundo puncto recta linea EMA secare curvam praeter punctum M. Igitur in casu (*Prop. II. num. I. Fig. III. & num. II. Fig. V.*) potest recta EMA secare curvam oppositam in duobus punctis; & non in duobus; sed in uno secabit. FIG. III. quae ibi. FIG. IV. FIG V.

In casu Propos. III. si intersectio E caderet ad partes S. curvae contra asymptotum QD; secaretur curva necessario in duobus punctis M. & K. à recta EAM; uti ibi ostensum est. Sed sequeretur absurdum demonstratum in proposit. Qua de caussa non est Locus eo casu in hyperbola opposita GS. Atq; si eadem intersectio E cadat ad partes curvae G versus QD. nuspiam erit locus in sectione. quod etiam ibidem demonstratur; sive E incidat intra BO. sive extra. Quo utroq; modo recta EAM. nequit nisi in unico puncto M. curvam asymptoticam secare; cum anguli MEB. vertex sit E. supra asymptotorum. Inde eius duo latera EAM; & EB. semper subinde fiant divergentia. quare EAM. numquam potest alibi occurrere curvae asymptoticae identidem ad asymptotum semper eandem BE accedenti. Id vero in aliis casibus propos. II. Fig. III. IV. V. non consistit. FIG. VI FIG. VII. & VIII.

Ergo in sectione opposita erit semper locus quaesitus, si pertransit illa per extremum punctum A. datae rectae AB. (*propositione II. num. II. Fig. IV.*) Et nuspiam erit locus; si curva cadat tota extra AB; atque abscissae sint $-x$. & ordinatae $-y$; in loco quidem quaesito. (*Proposit. III. Fig. V. & VI.*) Si denique

E curva

curva ipsa opposita cadat tota extra AB; & non secet rectam AB; Sed abscissae loci quaesiti sint $+x$, & ordinatae $-y$ (*Proposit. II. num. I. Fig. III.*) aut secet ipsam AB. (*Proposit. II. num. II. Fig. V.*) tunc erit semper opposita sectio hyperbolica limes ordinationum quaesitus. Haec enim ex praecedentibus consectantur. Et quidem his duobus postremis casibus; cum non demonstretur recta EMA necessario secare curvam oppositam in duobus punctis; potest enim, & non potest sic illam secare; uti initio scholii dictum est; & cum loci quaesiti aequatio bene proveniat; non secabit ipsa EMA curvam illam in duobus punctis: & locus sane erit in curva (*proposit. II. num. I. Fig. III. & num. II. Fig. V.*)

PROPOSITIO IV.

Sint omnia quae antea. Sed datus angulus ABD sit rectus (*Fig. I. Proposit. I*) & idem quaeratur. datus enim ibi fuit acutus. Eadem omni ex parte erit solutio: & constructio. Etenim solum fiet $AF = AB$. Hinc AB erit $= b$. Et in constructione asymptotus QLX erit ad normam supra BD. in Q. Et cadet etiam intra angulum BQK obtusum. Et reliqua uti in Propositione prima.

FIG. IX. Sit idem angulus ABD datus obtusus. Conficietur quoque eodem modo problema. Et datus angulus ordinatarum MCB erit quoque obtusus. Et perpendiculum AF. cadet extra AB. atque AO parallela ducta ordinatis supra BD. incidet supra BD. ad partes D. Sicuti in praecedentibus. Et EC erit pariter $= BC - BE$. atque $OE = BE - BO$. uti in loco quaesito. (*proposit. I.*) Et reliqua omnia eodem modo sicuti antea perficientur.

PROBLEMA V. GEOMETRICVM.

PROBL. V.

PROPOSITIO I.

TAB IV. FIG. I. Sit datum positione, & magnitudine triangulum BAQ. rectangulum in B. Quaeritur trames punctorum M. ita ut ductis

ex

ex punctis M. lineis rectis MN parallelis BQ. & occurrentibus in N. ipsi BA protractae hinc, & hinc, si iungantur MA. & NQ. fiant aequales. Sit ABQ datum triangulum non Isosceles. Itemque sit AB latus minus latere BQ.

Ponatur inventus Limes DEI. cujus punctum quodvis sit M. manens in locis positis superne ipsi datae BQ. Ex M. ducta MN aequidistans BQ secet BA in N. Connectantur MA. & NQ. Sint datae $AB = a$. & $BQ = b$. atque abscissae loci quaesiti AN ex A tendentes versus B. sint $+ x$. Et ordinatae ibi positae NM in plaga aversa ipsi BQ. sint $+ y$. Erit $BN = AN - AB = x - a$. atqui est $MA^2 = yy + xx$. atque $NQ^2 = bb + xx - 2ax + aa$. & MA. (*hypothesi*) est $= NQ$. Ergo erit $yy + xx = bb + xx - 2ax + aa$. Et $yy + 2ax - bb - aa = 0$. Construetur autem Locus sic. FIG. EADEM

Sumatur in AB. versus B. Linea $AD = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$. Erit AD. recta maior AB. Quod ostenditur. Nam est $\frac{bb}{a}$ tertia Geometrica post a. & b. quae sit recta linea L. Inde erit $AB . BQ :: BQ . L$. Quare (*hypothesi*) erit L. maior BQ. Et longe magis maior quàm AB. Hinc $\frac{L}{2}$ maior $\frac{AB}{2}$. & $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$; scilicet $\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$ maior erit $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2}$. nempe a. Quare AD. recta definita maior erit AB. Inde punctum D. cadet extra AB. versus B. Nunc axi DBA. vertice D. parametro $DL = 2a$. describatur Parabola $IEDF$. Erit ea semita punctorum M. quaesita. FIG. EADEM

Quoniam ordinatim ponatur ex DBA. quaevis NM ad parabolam in crure DE. superius ad BQ. Et sunt $AN = x$. abscissae loci quaesiti. Sed loci constructi sunt abscissae $DN = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Eaedem vero $NM = y$. ordinatae utriusque sunt Loci. Sed ob parabolam habetur $MN^2 = DN \times DL$. Igi-

tur erit $yy = \overline{\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x} \times 2a$. Itaque erit $yy = bb + aa - 2ax$. Et $yy + 2ax - aa - bb = 0$. Qui locus fuit inventus. Quare iunctae semper MA. & NQ. erunt aequales. Id enim positum est. $Q.E.F.$

PROPOSITIO II.

EADEM FIG. Sint omnia quae antea. non permeabit Parabolae crus DF. per Q. verticem dati trianguli. Esset enim per locum Geometricum recta $BQ = AQ$. Quod valde absonum rationi. Itemque si ordinaretur ad curvam tota QBO; tunc AO foret $= AQ$. Ergo foret $= BQ$. Et inde $= BO$. Quae omni modo cum eadem ratione pugnant. Et quidem; si ad curvam ordinata foret ipsa QBO. fieret $BQ^2 = DB \times DL$. Quare esset $bb = \overline{\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - a} \times 2a$. Est enim $DB = AD - AB$. Igitur esset $bb = bb + aa - 2aa$. quod à ratione prorsus abhorret.

Est vero Locus in crure ipso DF. Nam sumatur quodvis punctum M. in illo superiùs ad datam BQO. & ordinatim ponatur MN; erit $AN = +x$. Et $MN = -y$. Inde MN^2 erit $= +yy$. Et reliqua uti antea. Eritque etiam ibi $NQ = MA$. Itemque si sumatur ibidem tota ordinata MNM. erit MA. in crure $DE = NQ$. Sed MA cruris DE est $= MA$ cruris DF. Ergo in crure DF est etiam $MA = NQ$.

Accipiatur nunc plaga infra BQO. Vbi abscissae efficiuntur $= -x$. Et ordinatae in parte versus parabolae crus DE sunt $+y$; sed in loco versus parabolae crus DF. sunt $-y$. Itaque sit ibi abscissa AP; & ordinata PK versus DF. Et erit parabolae abscissa $DP = DA + AP = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Et ordinata PK erit $= -y$. Igitur eadem prodibit ibi aequatio. Et

sit

ſit ibidem abſciſſa AH. Et ordinata HM. verſus DE. Et erit parabolae abſciſſa $DH = DA + AH = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Et ordinata HM. erit $= + y$. Et eandem etiam inveniemus aequationem. Inde erunt junctae PQ. & AK. atque HQ. & AM inter ſe aequales.

Tandem Locus in Curvae portione TR. intercepta inter duo trianguli latera BQ. AQ. inſidit etiam hinc, & inde ad curvam. Quoniam erit ibi abſciſſa $BN = AB - AN = a - x$ & ordinata $NM = \mp y$. Inde efficiantur omnia; quae antea: eritque ibi $MA = NQ$. Ergo ſane ubique in deſcripta parabola adeſt quaeſita ſedes ordinationum MN.

PROPOSITIO III.

Sint omnia qua antea. Sed datum triangulum BAQ. Sit Iſoſceles. Et erit idem locus parabolicus; qui quaeritur. Sint enim quae prius. Itaque erit $AB = BQ$. Inde $a = b$. Et $AD = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$ fiet $= a$. Igitur erit $AD = AB$. Et B. efficietur vertex parabolae in loco conſtructo; cum iam provenerit locus quaeſitus $yy + 2ax - 2aa = 0$. Idem vero axis BA. erit Parabolae; & idem latus rectum $2a$. Igitur ſit ordinata MN. & abſciſſa BN. Erit illa quidem $= \mp y$. haec vero aequalis ſemper erit $a - x$. Sed eſt $MN^2 = BN \times 2a$. Quare erit $yy = 2aa - 2ax$. Et $yy + 2ax - 2aa = 0$. Et ubique veſtigia M. in utroque parabolae crure BE. & BF. invenientur tam ſupra, quàm infra punctum A. quare ubique erit MA aequalis NQ. FIG. I. & II.

ALI-

ALITER OMNIA SYNTHETICE.

LEMMA.

I. SIT data recta linea AD. magnitudine; cuius data pars AB.
FIG. III. divisa sit bifariam in C. Addatur ipsi AD in directum recta DO aequalis BD. Erit AO; scilicet dupla BD; una cum AB. aequalis $2CD$. Nam est $AO = AB + BO = 2CB + 2BD = 2CD$. Item erit $2DA - BA = 2CD$. Nam est $DA - CD = AC = \frac{BA}{2}$. Ergo erit $2DA - 2CD = BA$. Et $2DA - BA = 2CD$.

II. Sit recta AB, & recta BQ. atque sit K tertia Geome-
EADEM FIG. trica post duplam AB. & post BQ. perspicuum est; esse duplam K tertiam Geometricam post simplicem AB. & post BQ.

PROPOSITIO IV.

FIG. I. MOdo sint, quae antea. dividatur BA bifariam in C. Et descripta sit parabola EDF. vertice; axi; parametro; quemadmodum in superioribus constitutum est. dico illum esse locum quaesitum. demonstratur. Est recta DL. parameter.

Nam sumatur semiordinata Parabolae quaevis NM. ex A. versus verticem D. Erit per parabolam $MN^2 = DN \times DL$. Inde $AM^2 = AN^2 + MN^2$ erit $= AN^2 + DN \times DL$. Sive $AM^2 = DN \times DL + AB^2 + 2AB \times BN + BN^2$ (4. 2. *Elem.*) atqui est $DL = 2AB$. [*per fabricam*] Quare erit $AM^2 = 2AB \times DN + 2AB \times BN + AB^2 + BN^2$. Sive $AM^2 = 2AB \times DB + AB^2 + BN^2$. [1. 2. *Elem.*] Scilicet AM^2 erit $= 2DB \times AB + AB^2 + BN^2$. Sumatur tamquam una recta linea $2DB + AB$. atque altera sit recta AB. Igitur erit $2DB \times AB + AB^2$ rectangulum ex recta $2DB + AB$ in rectam alteram AB (*per eandem*). Et inde AM^2 erit $=$ rectangulo; quod ex $2DB + AB$. conficitur in AB; una cum BN^2.

Erat

Erat (*constructione*) tota AD aequalis ipsi AC. simul cum tertia in proportione Geometrica post $2AB$. & BQ. Sed AD. componitur ex AC. & CD. Ergo erit $AC + CD$ aequalis ipsi AC. cum dicta tertia Geometrica; Et; sublata communi AC; erit sola CD aequalis eidem tertiae. Et dupla CD. aequalis tertiae Geometricae post AB. & BQ. [*Lemm. n.* 2.] atqui dupla DB simul cum AB. est aequalis duplae CD (*Lemm. n.* 1.). Ergo dupla DB simul cum AB. erit tertia illa post AB. & BQ. Et BQ^2 erit aequale rectangulo; quod ex dupla DB. simul cum AB. tamquam ex una recta linea constituitur in ipsam AB. (16. VI. *Elem.*) atqui hoc rectangulum una cum BN^2. erat aequale quadrato quod ex AM. Igitur erit $AM^2 = BQ^2 + BN^2$. Sed etiam est $NQ^2 = BQ^2 + BN^2$. Ergo erit $AM^2 = NQ^2$. Et $AM = NQ$. Q. E. D.

Accipiatur nunc semiordinata parabolae quaevis HM. ex A. in plaga aversa vertici D. Et fiant. quae antea. atque erit $AM^2 = MH^2 + AH^2 = DH \times DL + BH^2 - BA^2 - 2BA \times AH$. (*per parabol.* & 4. 2. *Elem.*) Sed est $DL =$ [*construction.*] $2BA$. quare erit $AM^2 = 2AB \times DH - 2AB \times AH + BH^2 - BA^2 = 2AB \times DA + BH^2 - BA^2$. Etenim est $AB \times DH = AB \times DA + AB \times AH$ (1. 2. *Elem.*) sive $2AB \times DH = 2AB\ DA + 2AB \times AH$. Inde erit $2AB \times DH - 2AB \times AH = 2AB \times DA$. Ergo fiet $AM^2 = 2AB \times DA + BH^2 - BA^2$. Et constituatur una recta linea $2DA - BA$. [erit autem semper (*hypothesi*) $2DA$ maior quàm BA] Ergo $2DA \times AB - BA^2$. erit rectangulum; quod ex recta linea $2DA - BA$ in BA efficitur (*per eandem*) ; cui simul cum BH^2 erit aequale AM^2. Et sicuti antea ostendetur $2CD$ tertia Geometrica post AB; & BQ. atqui $2DA - BA$ est $= 2CD$ [*Lemm. n.* 1.] Igitur erit AB tertia Geometrica post BQ; & $2DA - BA$. Quare BQ^2 = rectangulo quod ex recta linea constituta $2DA - BA$ efficitur in BA. (16. VI. *Elem.*); cui una cum quadrato BH^2 erit $= AM^2$. Ergo AM^2 erit $= BQ^2 + BH^2$. Sed etiam HQ^2 est $= BQ^2 + BH^2$. Inde $AM^2 = HQ^2$. Et $AM = HQ$. Q. E. D. EADEM FIG.

PROPOSITIO V.

FIG. II. Sint omnia. quae antea. Si datum triangulum fuerit ABQ isosceles; facilis est synthetica problematis solutio. Nam; veluti casu eodem effectum est in proposit. III. (*Fig.ᵇ quae ibi*); describatur Parabola eadem; sed vertice B communi cum trianguli ABQ dati vertice: & erit ea Limes ordinationum quaesitus; plane idem ac in alio casu. Quoniam sumatur primum abscissa BN in axi BAG. supra punctum A. Et inde ordinatim ad curvam ponatur NM; iunganturque MA. & NQ. Est quidem $MA^2 = MN^2 + NA^2 = BN \times 2BA + NA^2 =$ (7. 2. *Elem.*) $BA^2 + BN^2 = BQ^2 + BN^2$. Sed etiam NQ^2 est $= BN^2 + BQ^2$. Ergo erit $MA^2 = NQ^2$. & $MA = NQ$.

Accipiatur postea alia abscissa BH infra A. unde sit ordinata ad parabolam posita HM. Et connectantur HQ; atque MA. Est sane $MA^2 = MH^2 + AH^2 = BH \times 2BA + AH^2$; scilicet $= 2BH \times BA + AH^2$; inde erit $MA^2 = BH^2 + BA^2$ [7. 2. *Elem.*] $= BH^2 + BQ^2$. atqui etiam est $HQ^2 = BH^2 + BQ^2$. Igitur erit $MA^2 = HQ^2$. atq; $MA = HQ$. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

FIG. IV. Nunc in eodem triangulo dato ABQ. non aequicruri sit latus AB maius quàm BQ. Et erit recta AD minor AB. Quandoquidem sit recta linea L. supra definita (*proposit. I.*) Igitur erit $AB . BQ :: BQ . L$; atq; inde [*hypoth.*] recta L minor BQ; Igitur erit L. longe magis minor, quàm AB. Et $\frac{L}{2}$ minor $\frac{AB}{2}$. atque $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$ minor $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2}$; Ergo erit $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$ minor AB; scilicet AD (*ead. propos.*) minor AB. cadetque vertex D curvae parabolicae intra latus AB. trianguli dati ABQ. Et reliqua hoc

hoc casu ipsius verticis *D* intra *BA* locati fient plane uti in antecedentibus; si triangulum non fuerit Equicrure; tùm in Analytica; cum in Synthetica solutione. Etenim pro solutione Synthetica; si semiordinata sumebatur quaevis *HM* parabolae infa *A*; opus erat; ut $2DA$ foret recta maior quàm *BA*. (*Proposition. IV.*) atqui aut dati trianguli non Isoscelis *ABQ* latus *AB* sit minus; aut sit maius latere *BQ*; erit semper recta $2DA$ maior quàm *AB*; quoniam; si dicatur quoque *L* tertia pracdicta proportionalis; erit (*construction. Proposit. I.*) semper $\frac{L}{2} + \frac{BA}{2} = DA$. unde erit semper $L + BA = 2DA$. Ergo $2DA$ erit maior semper recta linea quàm *BA*. excessu eiusdem tertiae proportionalis. Quare patet quod propositum est. Solutio autem analytica est eadem, quae supra [*Propositione I.*] FIG. IV. FIG. I.

S C H O L I V M.

I. Ostenditur in his semper; si sumatur etiam radix falsa $-x$. progigni aequationem; quae construitur; & quae est ipsamet inventa. Ergo ostenditur, à radicibus etiam falsis praeberi valores ignotae *x*. & esse illas aequationis inventae etiam radices; & satisfacere quaestioni. Et ita semper in antecedentibus; & in insequentibus. Quod semel admonitum volumus.

II. Quaesivit Limitem hunc parabolicum insignis ad laudem Geometra V. Vivianus in Divinatione secunda Geometrica in Aristaeum seniorem Lib. 3. a propositione XIX. usq. ad XXII. de Locis Solidis. Quatuor igitur propositionibus rem absolvit. Quarum prima proponit problema; si datum rectangulum triangulum fuerit Isosceles; tres vero aliae spectant casum; si idem triangulum non fuerit Isosceles. Et duae illarum continent non brevia Lemmata; tertia autem; qua Problema solvitur; satis bene est longa. Iam vero solutio Analytica non adest. Et nostra Synthetica solutio ab illa Vivianii est plane diversa.

PROBLEMA VI. ALGEBRICVM.

PROPOSITIO VNICA.

THeorema praecipuum Algebricum eſt; in tot punctis curvam ab alia curva ſecari, & non pluribus; quot indicat numerus factus in multiplicatione mutua duorum exponentum ignotarum duarum maximarum; quae ignotae naturam curvae commonſtrant. Id theorema interſectioni duorum Circulorum minimè convenit; qui mutuo in pluribus quàm duobus punctis non ſecantur per Elem. Geometr.. Deberent vero in quatuor; cum Circulus curva ſit conica duarum dimenſionum. Eſt igitur Circulus à Theoremate ſecludendus. Attamen oportet & Algebrice quaerere in quot punctis Circulus Circulum ſecare poſſit; atque convenientiam Algebrae, & Geometriae manifeſtare. Quod facere aggredimur; cum à nemine hactenus confectum viderimus.

Linea primi ordinis eſt recta; & unius dimenſionis. Et Linea ſecundi ordinis; ſeu curva Primi Generis eſt curva conica; atque duarum dimenſiouum: & linea Tertii ordinis; ſeu curva Secundi Generis eſt trium dimenſionum: atque linea quarti ordinis, ſive Tertii Generis eſt quatuor dimenſionum: atque linea quinti ordinis; ſeu Quarti Generis habet quinque dimenſiones. Et ita deinceps. Etenim linea primi ordinis eſt recta. Et nomen generis tribuitur ſolis lineis curvis. Quae nota ordo doctrinae hic poſtulavit enunciata.

Itaque cum conicae lineae ſint duarum dimenſionum; profecto curva conica non ſecabit aliam conicam in pluribus, quàm quatuor punctis. poteſt enim ſecare in minoribus. quod ſemper intelligendum eſt. Et curva ſecundi Generis non ſecabit aliam Generis etiam ſecundi in pluribus quàm novem punctis: atque non ſecabit curvam generis primi, ſeu conicam in pluribus, quàm ſex punctis. Atque curva una ſecundi Generis non interſecabitur cum altera Tertii in pluribus quàm 12. punctis. Et ita hoc ordine de reliquis. Demonſtratio Algebrica generalis pro omnibus curvis

eſſe

esse potest (sed & aliae demonstrationes prolatae; & litteris traditae sunt) quoniam si ex puncto unius intersectionis duarum curvarum ducatur ordinatim posita in dato angulo ad aliam rectam; sive diametrum aliquam; positione datam: quae recta ordinatim posita habeat exponentem maximum curvae, atque naturam illius indicantem; continebit sane ipsa ordinata; calculo algebrico instituto iuxta naturam duarum curvarum mutuo intersectarum; dimensiones numero pares dicto producto. Quod compertum; perspectumque est in constructionibus aequationum algebricarum; quando problema est determinatum. In quibus constructionibus duae adsumuntur curvae ad ipsam constructionem. Oportet autem; ut aequatio constructa radices omnes habeat reales aut veras, aut falsas; & nullam fictitiam.

Excipiendus est Circulus. qui curva est primi Generis; aut secundi Gradus; attamen Circulus Circulum non secat in pluribus quàm duobus punctis. quod ostenditur in Elementis Geometriae. Sed id ipsum Algebrica analysis modo nuper exposito per intersectionem duorum circulorum; ex qua intersectione linea recta ducatur ad aliam positione datam in angulo recto; & quae linea recta ordinatím posita in constructione naturam exponit circuli; plane, & recte commonstrat.

PROBL. VI. FIG. I. & II.

Sint enim Circuli duo sese mutuo intersecantes. Quorum centra *B*. & *O*. aut ambo manentia intus unum Circulum; aut alterum intus unum Circulum; & alterum intra alium Circulum. Sintque intersectiones *N*. & *N*; unde agantur *NC*. ordinatim adsumptae in constrution ad angulos rectos supra *BO*. quae *BO* data centra coniungat. qui primus est casus. Accipiuntur autem ductae *NC*. normaliter supra *BO* ad demonstrationem huius Theorematis; quod nunc ostendendum est.

Producatur *BO*. eo usque secet Circulos in *D*. & *T*. atque in *E*. & *Q*. erit *DT* diameter unius Circuli; atque *EQ*. diameter alterius. Et coniungantur *NO*. & *NB*. dicantur radius $NO = a$, & radius $NB = b$. Item dicatur $BO = c$. Et ordina-

FIG. II. & I. dinatim posita NC pro constructione sit $= x$. Erit $OC = BO - BC$; aut $= BO + BC$. Quare erit $OC = c \mp \sqrt{bb - xx}$. atqui est $NO^2 = NC^2 + OC^2$. quare erit $aa = xx + cc - 2c \sqrt{bb - xx} + bb - xx$; sive $= xx + cc + 2c \sqrt{bb - xx} + bb - xx$.

FIG. I. & II Inde erit $aa - bb - cc = \mp 2c \sqrt{bb - xx}$. atque $a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc + 2bbcc = 4ccbb - 4ccxx$. atque $xx + \frac{a^4}{4cc} + \frac{b^4}{4cc} + \frac{c^2}{4} - \frac{aabb}{2cc} - \frac{aa}{2} + \frac{bb}{2} - bb = 0$. Quae aequatio est secundi gradus.

Secundus Casus. Sit modo linea positione data non quidem BO iungens centra Circulorum; sed alia HL. ad quam ordinata in constructione teferatur. Sitque haec ordinata in angulo pariter recto supra HL. quae HL cadat vel intra duos Circulos; vel

FIG. I. & II. extra. Et vel hinc; vel inde ab ipsa BOD. dicaturque in constructione $NI = x$. Est quidem NI recta ex puncto intersectionis N. ducta. & quae protracta secat eandem BOD in C. & HL. in I. ad normam (*hypothesi*). Est sane HL. parallela BOD accepta. Data est positione HL; & data etiam positione; itemq; magnitudine BO. Et denominationes rectarum sint quae antea. Sed IC data sit $= d$. Erit $NC = NI + IC$; sive $= IC - NI$. Hinc $NC = x + d$; sive $= d - x$. Sed est $BC^2 = BN^2 - NC^2$. Vnde $BC = \sqrt{BN^2 - NC^2}$. Ergo erit $BC = \sqrt{bb - xx - 2dx - dd}$; sive $= \sqrt{bb - xx + 2dx - dd}$. Atque $CO = BO - BC$. sive $= BO + BC$; erit $= c \mp \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Atqui est $NO^2 = NC^2 + CO^2 = \overline{NI + IC}^2 + CO^2$, sive $= \overline{IC - NI}^2 + CO^2$. quare habebitur $aa = xx + 2dx + dd + cc \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} + bb - xx \mp 2dx - dd$. Sive $aa = xx - 2dx + dd + cc \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} + bb - xx \mp 2dx - dd$.

Hinc erit aequatio vel prima $aa - 2dx - cc - bb \pm 2dx = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} = 0$. sive secunda $aa + 2dx - cc - bb \pm 2dx = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Igitur

vel

vel tam una, quàm altera aequatio erit $aa - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. vel etiam prima erit $aa - 4dx - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Et secunda erit $aa + 4dx - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Iuxta terminum $\mp 2dx$; qui in prima aequatione fit $-2dx$. unde $+2dx$; & $-2dx$ manentes, ubi sunt; sese collidant: aut fit $+2dx$, quare translati quò aa. ipsi $+2dx$; & $+2dx$ faciant $-4dx$: aut qui in secunda aequatione fit $+2dx$. unde $-2dx$ & $+2dx$ manentes, ubi sunt: sese perdant: aut fit $-2dx$. Quare translati quò aa. ipsi $-2dx$; & $-2dx$ faciant $+4dx$. Sed aequatio est semper secundi gradus; quicumq; casus fuerint aut signorum $+$; aut signorum $-$. atque aut quantitas $16dd$ maior sit, vel minor quàm $4cc$; scilicet sit $4d$. maior vel minor $2c$. Quae comperta erunt; si quis calculo probarit.

III. Casus. Sit Linea positione data SP; ad quam ordinatae ex intersectione duorum Circulorum ductae referantur in constructione in angulo dato: quae SP neque linea sit coniungens data centra Circulorum; neq; illi aequidistans: & cadat vel extra, vel intra ipsos Circulos. Ex puncto intersectionis N. Circulorum ordinatim ponatur NC; ad angulum profecto rectum supra BOD. Et secet NC rectam SP in M. data est positione SP. atque data positione; & magnitudine BO. datumque punctum N. Ergo data erit MC. positione; & magnitudine. (26. *libri datorum Euclid*) dicaturque $MC = d$. Sit vero NM in constructione x. Et reliquae lineae denominentur, uti supra. Erit $NC = x + d$; si SP cadit intra Circulos; sive $= d - x$; si cadit extra; cum primo casu fit $NC = NM + MC$. atq; secundo fit $= MC - NM$. Sed BC^2 est $= BN^2 - NC^2$. Vnde BC erit $= \sqrt{BN^2 - NC^2} = \sqrt{bb - xx - 2dx - dd}$; sive $= \sqrt{bb - xx + 2dx - xx}$. atque est $CO = BO - BC$; sive $= BO + BC$. Igitur erit $CO = c \mp \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Acqui est $NO^2 = NC^2 + CO^2 = \overline{NM + MC}^2 + CO^2$; vel $= \overline{MC - MN}^2 + CO^2$. Itaque erit $aa = xx + 2dx + dd + cc \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$

FIG. I. & II.

FIG. I. p. 21

+

$+ bb - xx \mp 2dx - dd$; five erit $aa = xx - 2dx + dd + cc \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} + bb - xx \mp 2dx - dd$. quare ventum prorfus eft ad cafum fecundum, Itaque reliqua ficuti ibi fint. Et aequatio femper provenit duarum dimenfionum; quodvis fuerit fignum vel $+$; vel $-$. atque eodem modo aut $16dd$ maior quantitas fit, vel minor $4cc$; nempe $4d$ maior fit, vel minor $2c$. Et reliqua; uti in latu fecundo dictum eft. Ergo circulum non fecari à Circulo in pluribus, quàm duobus punctis eft Algebrice demonftratum. *Q. F. O.*

S c h o l i v m.

Linea etiam recta includitur theoremate illo algebrico; fcilicet in tot punctis fecari lineam a linea; quot indicat factum ex Exponentibus dimenfionum illarum. Eft enim linea recta, linea primi ordinis; & unius dimenfionis, feu unius gradus: & fecat aliam rectam in uno puncto; & fecat curvam conicam in duobus; & lineam tertii ordinis; feu curvam fecundi Generis in tribus punctis; & lineam ordinis quarti; feu curvam tertii Generis in quatuor punctis; & lineam fecat ordinis infinitefimi in punctis infinitis.

Cognofcitur igitur per hoc theorema Syntheticae, & Algebricae Geometriae mira, & fumma confenfio. Ipfa enim eadem Algebrica Geometria; quae generale demonftrat problema; habet & demonftratum cafum ex illo fcclufum iuxta fyntheticam Geometriam.

PROBLEMA VII. GEOMETRICVM.

TAB. V. PROBL. VII. FIG. I.

P R O P O S I T I O I.

SIT data parabola *AG*. cuius vertex *A*. Axis *AH*. Parameter *AL*. Et fit datum extra parabolam punctum *C*. oportet ex *C*. normalem rectam lineam *CB* ad curvae perimetrum demittere. Po-

Ponatur esse CB quaesitum perpendiculum. Sit ex B. tangens curvae BT. cui erit etiam ad normam recta CB; occurratque tangens axi curvae in T. Secet vero CB. ipsum axim in Q. Ex C. agatur CD parallela ordinatis curvae supra datam positione AH; cui conveniat in D. Educatur etiam ex B. recta BF. parallela AH. occurrens CD. in F. Liquet cadere illam intus CD; cum sit angulus in D. rectus; & normalis CB. concurrat necessario in Q. cum axi, sive recta DAH.

Sint datae, cognitaeque rectae $CD = a$. $DA = b$. Parameter AL curvae $= p$. Sed sit ignota DF; & denominata x. ordinatim ad curvam adplicetur BN. Erit $BN = DF = x$. atqui ab parabolam est $AN = \frac{xx}{p}$. Inde $DN = DA + AN$ erit $b + \frac{xx}{p} = \frac{bp + xx}{p}$. Sed ob normalem CB ad parabolam, & ob axim AH; habetur semper $QN = \frac{p}{2}$. Estque $QN \cdot NB :: BF. FC$. Ergo erit $\frac{p}{2}. x :: \frac{bp + xx}{p}. FC = \frac{2bpx + 2x^3}{pp}$. atqui data recta $DC = a$ constat ex partibus DF; & FC. Igitur erit $a = x + \frac{2bpx + 2x^3}{pp}$. Hinc conformata aequatio erit tertii gradus secundo termino orbata $x^3 + bpx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$.

Construetur autem sic.

Sit data positione recta FD. axis descriptae parabolae CFH. FIG. II. & III. cuius vertex F. parameter $\sqrt{\frac{pp}{2}}$. deinde in FD. sumatur extra parabolam recta $FI = \frac{b}{p} \sqrt{\frac{pp}{2}}$. atque ex I. excitetur ad

nor-

normam $IP = \frac{a}{2}$. & centro P. intervallo $PO = \sqrt{\frac{bb}{2} + \frac{aa}{4}}$ describatur Circulus OA.

FIG. II. & III. Perducetur Circulus per verticem F. Parabolae. Adiungatur enim recta PF ex P. ad verticem F. Est (*constructione*) $PF^2 = PI^2 + IF^2$. Inde erit $PF^2 = \frac{aa}{4} + \frac{bb}{2} = PO^2$. Est vero PO. Circuli radius. Ergo patet; quod propositum est.

Secabit circulus parabol. FC in aliquo puncto B. Demonstratur. Quoniam non solum algorithmus demonstrat modos dignoscendi; an aequationes tertii gradus radices habeant impossibiles, seu imaginarias; verùm etiam an habeant illae radices possibiles, seu dictas reales; cum demonstret radices impossibiles non fore nisi numero pari. Et primum quidem demonstratum etiam habet idem algorithmus pro aequationibus quarti gradus; non vero vicissim secundum; cum non sint verae propositiones conversae. Ergo (per illum) aequationes tertii gradus habent semper aliquam radicem possibilem. Et quae termino secundo deficiuntur, continent necessario radicem unam possibilem, & alias impossibiles; siquidem secundus terminus; qualis est in nostra; sit positivus; seu praefixus singno $+$. Pertransit vero Circulus per verticem F. Parabolae: quae intersectio nullam par est radicem aequationis ministrando. Ergo alia curvarum intersectio erit; atque praeterea non ulla.

Fiat haec intersectio in puncto B.

FIG. II. & III. Nunc ordinetur ad parabolam recta BN; atque ex B. ducatur BM. parallela IFD. secans PI. in M. Iungaturque radius PB. Dico, BN. esse quaesitam ignotam x; unicamque radicem aequationis inventae. Nam sit $BN = x = IM$. Nunc est MB, seu IN; vel $IF + FN = \frac{b}{p} \sqrt{\frac{pp}{2}} + \frac{+xx}{\sqrt{\frac{pp}{2}}}$ [*constructione*]. atque est MP. sive $IP - IM$; aut $IM - IP$ $=$

$= \frac{a}{2} - x$; vel $= x - \frac{a}{2}$ (*constructiön.*). Sed est $PB^2 = BM^2 + MP^2 = IN^2 + \overline{IP - IM}^2$ sive $= IN^2 + \overline{IM - IP}^2 = \overline{IF + NF}^2 + \overline{IP - IM}^2$; aut $= \overline{IF + FN}^2 + \overline{IM - IP}^2$. Quare erit $\frac{bb}{2} + \frac{aa}{4} = \frac{bb}{2} + \frac{2bxx}{p} + \frac{2x^4}{pp} + \frac{aa}{4} - ax + xx$. Igitur rite & recte instructa aequatio habetur $x^3 + pbx + \frac{ppx}{2}$

$- \frac{app}{2} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Igitur abscindatur FIG. I.
in data CD. portio FD aequalis determinatae BN. quae quidem FIG. II.
(*hypothesi*) est $+ x$. Et ex F. sit FB, parallela DAH. secans & III.
curvam in B. Et iungatur B. cum dato puncto C. Erit CB. nor- FIG. I.
malis quaesita ad parabolae perimetrum in B. aut ad tangentem in B. curvae. Id enim positum est. *Q. E. F.*

PROPOSITIO II.

CONSTRVCTIO ALIA.

Sint quae antea. Adsumatur novus locus parabolicus $by = xx$. Eritque $byx = x^3$. Succedat in sedem ipsius x^3. in aequatione inventa aequalitas illius byx. Et efficietur illa $byx + pbx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$.

Accipiatur in interminata recta AB. portio AL extra AB. FIG. IV.
aequalis $p + \frac{pp}{2b}$. atque vertice A. axi AB. parametro $= b$. describatur parabola AE. deinde sit LH ad normam in L. supra LAB. seu parallela ordinatis parabolae; atque in eadem LAB. fiat $LT = \frac{ap}{2b}$. Ex T. educatur TR. parallela LH; & aequalis parametro p. datae parabolae. Nunc asymptotis LH. LB. descripta sit per punctum R. hyperboles $CORD$. Liquet hy-

 per-

perbolem occurrere parabolae; & in ſingulari puncto N. habet enim illa aſymptotum axim parabolae AB. ad quam adtingere ſemper enititur; & nuſquam eam carpet. Ergo unam ſecat parabolae perimetrum AE. Idem pariter; uti ſupra; [*propoſit. I.*] demonſtratur per algorithmum. De caſu agitur AL. ſumptae extra AB.

Sit interſectionis punctum N, unde ordinetur ad parabolam recta NP. dico eſſe NP. quaeſitam x. Nam ſit $NP = x$. Et AP. eſt $= y$. Patet, deſcriptam parabolam eſſe inductum locum $by = xx$. atqui eſt (*conſtruction.*) $LP = LA + AP = p + \frac{pp}{2b} + y$. Et per hyperbolem habetur $LT \times TR = LP \times PN$. quare erit $\frac{app}{2b} = px + \frac{ppx}{2b} + xy$. Inde erit $byx + \frac{ppx}{2} + pbx - \frac{app}{2} = 0$. Qui locus erat hyperbolis aſymptoticae. atqui y. & x. ſunt eaedem rectae in utraque curva. Igitur ſufficiatur in hac aequatione loco byx eius aequalitas x^3 per parabolam comparata. Et erit $x^3 + \frac{ppx}{2} + pbx - \frac{app}{2} = 0$. quae aequatio fuit inventa; & conſtruenda erat. Inde NP. determinabit exoptatam x. quae pernoſci debebat. Et reliqua haud ſecus ac in praecedenti propoſitione.

PROPOSITIO III.

Sint omnia quae priùs. Et quaeratur, ut aequatio comperta conſtruatur ope parabolae ipſiuſmet datae.

Immiſſus novus parabolicus locus ſit $py = xx$. erit $pyx = x^3$. Et; facta ſubſtitutione aequalitatis in comperta aequatione; erit $pyx + bpx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$. Sive $yx + bx + \frac{px}{2} - \frac{ap}{2} = 0$. quae hyperboles eſt ad aſymptotos. Nunc in axi AH, pa-

parabolae initio datae AG. abrumpatur è vertice sumpta recta AL. sed extra axim AH aequalis $b + \frac{p}{2}$. Hinc erit AL. maior quàm AD. in eadem plaga posita. Ex L. agatur LK parallela ordinatis parabolae. Et in LAH. determinetur $LI = p$. atque ex I. sit IR aequidistans LK. aequalisque $\frac{a}{2}$. describatur modo per R. hyperboles ERM. asymptotis LK. & LH. Cadet quidem LI aut intra AD. aut extra; & supra axim AH. sed extra LD. versus H. cum sit $LD = \frac{p}{2}$. Agitur de casu AL. positae extra AH. FIG. V.

Secabit hyperboles descripta parabolam AG. & in unico puncto B. per supra dicta; scilicet tum per algorithmum; cùm per descriptionem. Etenim habet ea asymptotum axim AH. parabolae; ad quam semper enititur; & dilabitur. Itaque secet illa parabolam in B. Vnde ad eamdem parabolam ordinatim ponatur BN. Erit BN exoptata occulta x. Nam sit $BN = x$. Est $AN = y$. Quamobrem erit $LN = y + b + \frac{p}{2}$ (*construction.*). Est AG. parabola data (*per hypothes.*) atqui ob hyperbolem habetur $LN \times NB = LI \times IR$. Igitur erit $yx + bx + \frac{px}{2} = \frac{ap}{2}$. Quae hyperboles asymptotica erat. Et in utraque curva eadem recta est x. eademque y. Quare subeat in hac hyperbola in locum yx aequalitas, quam praebet parabola $\frac{x^3}{p}$. Et adsequemur eam quae inventa fuit, & erat construenda, aequationem $x^3 + pbx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$. Coniungatur nunc datum punctum C. cum B. & erit coniuncta CB. normalis ad AG. perimetrum parabolae datae. quod exoptabatur.

Id enim positum est.

SCHOLIVM.

Si data parabola fuerit cum diametro non cum axi; uti in propositione enunciatur; eadem plane est solutio. Nam; data diametro; invenitur illico axis; eiusque latus rectum: & consideretur data parabola cum axi, illiusque latere recto: & eadem peragantur. atque quaesita normalis ex dato puncto supra parabolae perimetrum deducetur. Si vero *AH*. sit axis; & datum punctum
FIG. I. sit supra axim; uti in *Q*. & oporteat ex *Q*. ducere normalem rectam lineam ad curvae perimetrum; satis bene liquet; aliud non esse efficiendum; quàm ut sumatur *QN*. versus apicem *A* curvae aequalis dimidio lateri recto; atque ex *N*. ordinetur *NB*: iuncta enim *BQ*. erit quaesita. Verùm alii esse possunt casus; scilicet puncti dati intra parabolam; unde agenda sit ad parabolae perimetrum recta normalis; quos excutere prosequemur.

PROPOSITIO IV.

FIG. VI. Sit datum punctum *C*. intra parabolam. Et idem quaeratur. profecto si datum punctum *C* in axi *AH* insederit; iam expositus casus fuit in Scholio praecedentis Propositionis. Sed sit datum supra diametro aliqua *IK* parabolae. Sitque vertex huius diametri *I*. Et inveniatur; data diametro; axis *AH*. Cuius vertex; seu vertex parabolae sit *A*. Sed sit datum *C*. intra parabolam; non vero supra ulla diametro; sit tamen data diameter *RS*. Et inveniatur axis *AH*. aut tandem sit datum *C*. intra parabolam cum nulla diametro data. Et inveniatur diameter una *RS*. deinde inveniatur axis *AH*. Continentur in his igitur casus omnes puncti dati intra parabolam: & supra, aut non supra diametro; non vero supra axi; de quo dictum est; uti nuper meminimus; in Schol Propos. praeced. Sit igitur parabolae axis *AH*.

Ponatur esse *CB*. intus *GAH*. quaesita normalis ad perimetrum

trum ABG. parabolae in B. Et adinveniatur semper latus rectum parabolae pertinens ad axim. Est sane datus vertex A. ipsius parabolae. Sit BT tangens curvae in B. occurrens axi in T. Et producta BC. occurrat eidem axi in Q. ordinatimque adplicetur recta BN. ad axim: Per C sit CD parallela ordinatis parabolae ad axim; quem secet in D. Itemq; ducatur BF parallela AH. occurrens CD in F. occuretq; per factam hypoth. extra CD. Haud absimilis erit solutio, ac si punctum C. maneret extra parabolam.

Sint igitur omnia uti supra. Et eaedem quantitatum denominationes. Ergo erit $AN = \frac{xx}{p}$. & $NT = \frac{2xx}{p}$. Sed est $DT = DA + AT$. Quare erit $DT = b + \frac{xx}{p} = \frac{bp + xx}{p}$. Et $DN = DT - TN$ erit $= \frac{bp + xx}{p} - \frac{2xx}{p} = \frac{bp - xx}{p} = BF$. atqui est $QN. NB :: BF. FC$. Ergo erit $\frac{p}{2}. x :: \frac{bp - xx}{p}. FC = \frac{2bpx - 2x^3}{pp}$. Inde $DC = FD - FC$. erit $= x - \frac{2pbx + 2x^3}{pp} = \frac{ppx - 2bpx + 2x^3}{pp}$; quae quantitas etiam est $a = DC$. ex illis duabus partibus constans ignotis. quare erit $app = ppx - 2bpx + 2x^3$. Et $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$.

FIG. VI.

Tertius huius aequationis terminus positivus esse potest; & negativus. Etenim $\frac{p}{2}$ maior esse potest; & minor quàm b. Siquidem fuerit ille positivus; eaedem tum omnino erunt inventae aequationis constructiones; quàm quae supra (*prop. II. & III.*) praebitae sunt. Vnde determinatum in parabola erit punctum B. cum quo si iungatur C. ubi vis datum; obtinebitur quaesita BC. Definietur vero B. in parabola; si ducta normali CD. ad AH. fiat in

in illa aequalis determinatae, & cognitae x. per constructionem recta FD. & ex F. educatur parallela FB ipsi AH. Occurret enim FB. parabola in puncto illo B. (*proposit. I.*)

PROPOSITIO V.

Sint quae antea. Sed sit $\frac{p}{2}$ maior quam b. Et inde terminus tertius aequationis sit negativus. Adsumatur $bp - \frac{pp}{2} = + mm$. inde erit $\frac{pp}{2} - bp = - mm$. Et fiet $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Et parcetur constructio per Circulum, & parabolam.

FIG. VII. & VIII. Quare sit AI recta terminata $= \frac{3m}{4}$. Ex I. ad angulos rectos sit $IP = \frac{app}{4mm}$. Et centro P intervallo $PO = \sqrt{\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4}}$. describatur Circulus ALQ. atque vertice A. axi AIH. parametroque m. descripta sit parabola DAK. Primo secabit Circulus parabolam. Et secundo quae ex intersectionibus ductae rectae ordinatae ad parabolam proferent valores ignotae x. & radices aequationis.

Quoniam iungatur PA. Erit sane $PA = \sqrt{\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4}}$. (*per fabricam*). Inde pertransit Circulus per verticem A. parabolae. Sed AI manet intra parabolam. Et radius PIO Circuli secat AI. in I. cùm sit multo maior quàm ipsa PI [*constructione*]. Ergo Circulus necessariè, & parabola mutuo occurrent. Secantur autem curvae in punctis aut uno; aut tribus. Praebent enim earum intersectiones; uti demonstrabitur; valorem ignotae x. Sed tres aut unum habet illa valores; non quidem necessariè tres. Quoniam; cum haec inventa aequatio tertii gradus careat secundo termino; non satis est (per non iam diu demonstrata in algorithmo)

rithmo) ut radices habere ea possit omnes tres possibiles; si tertius praefixus sit signo —; qualis est in nostra aequatione; & si triente coëfficientis illius affecti signo plus, sumptique cubi sit maius quadratum semissis termini postremi; qu inimmo contrarium exposcitur; ut scilicet dictus cubus sit maior dicto quadrato. Quare primo casu; si ea conditio invenitur scilicet illius cubi minoris illo quadrato; adest quidem radix una possibilis in aequatione tertii gradus; in qua [*per algorith*] una certe semper est possibilis; sed & ampliùs ea radix possibilis Arithmetice exponi potest: atque secundo casu; si invenitur conditio contraria quidem alteri; uti dictum; possunt quidem omnes radices esse possibiles; scilicet tres; licet possint & non esse; quoniam minimè est vera propositio conversa. non enim adhuc omnes innotuerunt necessariae conditiones. Haec autem non distinxit Cartesius. Lib. 3. Geometr. ubi de radicibus agit aequationum tertii Gradus; quae Arithmetice possint; aut non possint exponi. Ergo in nostra aequatione; quia potest dictus cubus esse maior dicto quadrato; & contra: potest dictum quadratum esse maius dicto cubo; atque etiam; quia non sunt verae propositiones conversae; esse poterunt radices tum tres; cum una tantum possibilis. Et inde aut una, aut tres erunt curvarum interfectiones. Quod erat primum.

Sin interfectiones tres B. unde ordinentur ad parabolam rectae BN. atq; ad circulum rectae BM. dein iungantur PB. Erunt $BM =$ FIG. VII. $AI - AN$. aut $= AN - AI$. Et $PM = PI + BN$; seu $= BN - PI$. Sunt autem $BN = + x$ ex B versus parabolam AK tendentes; & $= - x$. ex B. versus parabolam AP. Quare erit (*construct.*) $BM = \frac{3m}{4} - \frac{xx}{m}$; aut $= \frac{xx}{m} - \frac{3m}{4}$. Et PM erit $= \frac{app}{4mm}$ $- x$; sive $= x - \frac{app}{4mm}$. Atqui est $BP^2 = BM^2 + MP^2$. Quare erit

$$\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4} = \frac{9mm}{16} - \frac{3}{2}xx + \frac{x^4}{mm} + \frac{aap^4}{16m^4} - \frac{appx}{2mm}$$

+

$+ xx$. Inde erit $x^4 - \frac{3}{2} mmxx + mmxx - \frac{appx}{2} = 0$. Sive $x^3 - mmxx - \frac{app}{2} = 0$. Igitur habebitur $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Habet autem aequatio [*per algorith.*] radicem unam positivam; duas vero negativas; si tres sint possibiles. Inde valores duo ignotae x; sive radices duae aequationis inventae erunt duae BN. tendentes ex B ad parab.^{em} AD; & una vera erit BN. vergens ex B. ad parabolam AK. Et haec fuit $+ x$. illaeq; $- x$. Quod erat alterum.

FIG. VIII. II. Sit radix singularis possibilis inventae aequationis. Occurret parabola Circulo illum secans in unico B. puncto cruris AD. ex dictis. Inde enim ducta BN. contendit ad alterum crus AK. Et est BN. radix positiva $+ x$. Etenim quae possibilis est una aequationis radix esse debet positiva. Nam; ob defectum secundi termini summa duarum falsarum radicum (*per algorith.*) destruere debet tertiam positivam. Sunt enim in hac aequatione duae radices falsae; & una vera. Non autem summa illa necessario elidetur cum tertia radice; nisi haec habeat $+$; & falsae simul additae necessario praefigantur signo $-$; scilicet sint ambae negativae. Quoniam duarum harum falsarum una maior esse potest altera. indeque si utraque non invenietur affecta signo $-$. non destruent illae additae simul radicem veram. Ergo patet quod proponitur, esse, quae possibilis est radix; necessario positivam.

FIG. VI. Modo si tres sint radices possibiles; sumantur in recta CD ducta normali ad axim in D per C punctum aut datum intra parabolam, aut datum extra illam portio una FD. ex C. versus parabolam AP aequalis determinatae $BN + x$. (Fig VII.) Eo enim in loco accepta in proposit. fuit ignota BN, seu $DF = + x$. (Fig. I.);

FIG VI. & duae FD. in plaga aversa; nempe versus parabolam AG. una aequalis uni BN. (Fig. VII) Et altera aequalis alii BN duarum BN. quae tendunt versus parabolam AD. suntque $- x$. Deinde ex F.

agan-

agantur axi parallelae rectae FB. Secabunt FB. parabolam in quaesito puncto B. Erunt enim CB. normales perimetro curvae in B; seu ad tangentem ductam ex B. Id enim positum est. FIG. VI.

Una sit possibilis radix aequationis. Sumatur FD. modo dicto ex C versus parabol.^{m} AP aequalis $BN + x$. (*Fig.* VIII.) Et reliqua uti prius. FIG. VI.

S C H O L I U M.

Perducitur descriptus circulus per verticem A. parabolae; seu axis. quod demonstratum est. Sed nulla inde enasci potest aequationis radix per constructionem. Non alii sunt problematis casus, nisi qui his propositionibus continentur. Casus enim puncti dati C. in parabolae perimetro; unde ducenda sit normalis; non vere est huius problematis casus; cum ducenda tantum tunc sit ex C. tangens curvam; atq; supra tangentem ad C. educenda recta ad normam. FIG. VII. & VIII.

Si propositio quarta habet inventam aequationem cum omnibus radicibus possibilibus; absolvet ea sola, determinabitque casus omnes problematis; si nempe punctum datum sit aut intus curvam alicubi; aut extra illam [*prop. IV.*]. Iamdiu in conicis demonstratum est; si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit; a quibus ad axim ex utraque parte demittantur rectae perpendiculares; esse aut unam, aut summam demissarum ex una parte aequalem illis, quae demittuntur ex altera. sed inventa in huius problematis solutione aequatio caret secundo termino; unde falsae radices, & verae sese mutuo (*per algorith.*) expellunt: & rectae construitur illa per circulum, & parabolam sese secantes. Ergo algorithmi, & reliquae Geometriae colligitur inde convenientia. Si punctum C datum sit extra parabolam; cadet F. intus CD. Quod demonstratum est propos. I. Si datum sit intra; tunc F. cadet extra CD. Simili modo id demonstratur. Et dictum quoque fuit proposit. I. FIG. VI.

Dictum est in hac propos.^{ne} & in prima, non esse veram de radice impossibili propos.^{em} conversam, de qua illic agitur; sedet non sunt verae propos.^{es} conversae de quacumq; radice impossibili: nimirum; si aequatio Algebrica quibusdam affecta sit conditionibus; demon-

strabitur adesse in illa radices impossibiles. at non per conversam propositionem; si illae conditiones non insint; radices erunt necessario possibiles, & reales in aequatione. Nam non adhuc omnes enumeratae erunt, & cognitae conditiones: atque aliae, quae latent, poterunt investigari. Id accidit aequationibus tertii gradus termino secundo destitutis; & quarum tertius habet —. Quoniam ut radices in illis esse possint omnes reales; non sanè diu est, quum abdita detecta est, & nova necessaria conditio; de qua dictum est in propositione V. initio pag. 55. Ostendit algorithmus aequationes dimensionum numeri imparis habere necessario radicem aliquam realem; uti de aequationibus tertii gradus dictum est in propositione I. pag. 48. sed alia haec res est, & plane diversa.

PROPOSITIO VI.

Sint omnia, quae antea. Et quaeratur eadem aequatio $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$. cum tertio termino negativo constructa per hyperbolem asymptoticam, & parabolam aut non datam, aut datam in problemate: sicuti etiam construebatur illa cum tertio eodem termino positivo (*proposit. II. & III*)

Sit igitur $bp - \frac{pp}{2} = + mm$. (*proposit. V*) Et erit $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Inducatur nova, & non quidem data in problemate parabola $my = xx$. Et erit $myx = x^3$. quare; effecta substitutione; habebitur $myx - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Sit

FIG. IV. nunc descripta parabola AE (*Fig. IV.*) cum parametro m. & diametro AB. Sumatur supra AB. intus parabolam portio AL aequalis parametro m. Sit LH ex L. parallela ordinatis parabolae AE. Item fiat supra eadem AB intus parabolam recta $AT = \frac{ap}{2m}$. quae maior erit, vel minor quàm AL. Ex T. educatur TR parabola LH. & $= p$. atque asymptotis LH. LB. descripta

sit

fit hyperboles CD. per punctum R. quae fecabit parabolam (*propofit. II.*). Secet in N. Vnde ordinetur NP. ad parabolam. Eft $NP = +x$. atque AP. eft $+y$. Perfpicuum eft, effe AE. parabolam $my = xx$. Sed eft $LP = y - m$. Et; ob hyperbolem; eft $LT \times TR = LP \times PN$. quare erit $xy - mx = \frac{app}{2m}$. five $myx - mmx = \frac{app}{2}$. quae hyperboles fuit afymptotica. Sunt vero eaedem x; & eaedem in curva utraque y. Ergo; in locum mxy fuffecta eius aequalitate x^3 perquifita per parabolam; habebitur $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Vna eft interfectio N. (*prop. II.*)

Deinde; effectis quae prius; inducatur data in problemate parabola $py = xx$. Et; effecta fubftitutione; erit $pyx - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Igitur defcripta fit alia parabola AG. cum diametro AH. & parametro p. Sumatur in AH. intus parabolam portio $AL = \frac{mm}{p}$. & $AI = p$; quae maior erit, vel minor quàm AL. Ex I ducatur $IR = \frac{a}{2}$ parallela ordinatis datae parabolae. Itemque ex L. agatur LK parallela IR. atque afymptotis LK. LH. defcribatur per R. hyperboles EMR. quae fecat eam parabolam (*propofit. III.*). Secet in B. unde ad eandem parabolam ordinetur BN. Erit $BN = + x$; Et $AN = + y$. Eritque $LM = y - \frac{mm}{p}$ FIG. V.

Et reliqua patent. Et erit inventa aequatio conftructa tum primo modo cum hyperbola afymptotica, & parabola non data; cum fecundo modo per hyperbolem pariter afymptoticam; & parabolam problematis datam. *Q. E. F.* Vna eft interfectio B. (*prop. III.*)

Verum enim vero aut unam, aut alteram cooptas ex his conftructionibus; unicam femper adfequeris aequationis radicem (*propofit. II. & III.*); cum tamen poffit illa tribus effe praedita radicibus poffibilibus. (*propofit. IV.*).

PROBLEMA VIII. GEOMETRICVM.

TAB VI. PROBL. VIII. FIG. I

L E M M A I.

SIt parabola *IAH*. cuius diameter *AO*. ducatur ex diametri vertice *A*. tangens *AF*. curvae in *A*. si sumatur in *AF*. punctum quodvis *B*; unde ducatur alia curvae diameter *BE* illi occurrens in *E*. atque ex *E*. ordinatim ponatur *EO*. ad diametrum *AO*. illi occurrens in *O*. & curvae in *P*. Et connectatur *BP*. secans curvam in *C*, atque *AO*. in *D*. Erit $BC = CD$. (per doctrinam conicam). Nam erunt in continua proportione *BC*. *BD*. *BP*. Igitur dividendo erit *BC*. ad *CD*. uti *BD*. ad *DP*. sive *EO* ad *OP*. Inde BC erit $= CD$.

C O R O L L A R I V M.

EADEM FIG.

Igitur possibile est problema; dato puncto *P*. in parabolae perimetro *AH*. inclinare ex *P*. rectam *PC*. ad aliam perimetrum, ita ut linea interiecta *CD*. inter parabolae diametrum *AO*. & perimetrum sit aequalis datae. Erat enim punctum *B*. acceptum quodvis in tangente *AF*. quare rectè quaeretur; dato puncto *P* in perimetro; invenire punctum *B*. in *AF*. Vnde ducta dimetro *BE*. parabolae occurrente illi in *E*; fiant rectae *BC*. & *CD*. aequales; unde tam una, quàm altera aequalis erit rectae lineae datae. Igitur huic datae rectae esse potest aequalis *CD*.

L E M M A II.

EADEM FIG

SIt datum punctum *P*. in parabola *IAH*. cuius axis *AOV*. ordinetur *POE* ad parabolam. Non inclinabitur ex *P*. nisi una *PC* ad aliam perimetrum in locis supra *POE*. ita ut intercepta *DC*. inter axim. & perimetrum ipsam sit aequalis cuidam rectae lineae datae. Etenim sit; si fieri potest; alia *PNM* ex *P* ducta propior ad *POE*. quàm sit *PDC*; cuius *POE* definita pars *NM* sit aequalis ipsi *DC*. seu rectae datae. Sed est *PD* ob angulum rectum

in

in O. maior. quàm PN. Etenim eſt angulus DNP. obtuſus. Ergo erit CP. maior MP: quod impoſſibile ob parabolae naturam; cuius crura ab axi ſemper ſunt divergentia. Itaque patet quod proponitur. Et ubique ſupra POE non erit una NM. aequalis alteri CD.

II. Idem eveniet infra POE. Sint enim ibi duae ex eodem P. ductae PQK. PRS ad aliam perimetrum in K; & S. Ordinentur KR. SV. ſitque PQK propior ad POE. quàm PRS. Per S. agatur ST. parallela AOV. Cadet ST. extra parabolam in plaga verſus verticem A. Si enim caderet. intra ſecans KR. intus parabolam in T; eſſet KR verſus A. maior SV. remotiori ab A. cum ſit KR. maior TR. & inde maior SV. Id autem ob parabolam fieri nequit. Ergo ſecet PQK rectam ST extra parabolam in T. Eſt PR. maior PQ. ob angulum obtuſum PQR. cum ſit angulus in O rectus. atqui eſt PR. RS :: PQ. QT. Ergo RS maior erit QT. & longe magis maior QK. Et ubique infra POE. erit una maior RS. quàm altera QK. Et non duae illic interclusae eſſe poterunt inter axim & perimetrum aequales eidem rectae; aut inter ſe. Igitur ad idem punctum P. in parabola datum recta una poteſt in locis ſupra ordinatim poſitam POE tendere; cuius interiecta inter axim & perimetrum ſit data; & altera infra POE. eidem datae aequalis; atque non alia.

LEMMA III.

Sit data parabola EAB cuius diameter, aut axis AH. Et ordinatim agantur ad parabolam rectae NM. DP. ex punctis N. & D. Iungatur ND. ſecans AH in C. Erunt ob parabolam continuè proportionales AM. AC. AP. Demonſtratur. FIG. II.

FIG. III.

Quoniam ſi terminata recta linea BF. fuerit; in qua continuae ſint Geometricae BQ. BO. BF. demonſtrabitur inde, eſſe BQ. ad BF. in ratione duplicata QO. ad OF. atqui proprietas haec eſt linearum AM. AP. MC. CP. in parabola. Quandoquidem AM. AP :: MN^2. DP^2 :: MC^2. CP^2. Ergo erunt in parabola AM. AC. AP. continuè Geometricae. Q. E. D. FIG. I.

FIG. III. Demonſtratur nunc in linea terminata BF eſſe BQ, ad BF. in ratione duplicata QO. ad OF; ſi fuerint continuae BQ. BO. BF. Nam erit inde BO. ad BQ. uti BF. ad BO. Quare erit $BO - BQ$. ſive QO; ad BQ; uti $BF - BO$; ſive OF; ad BO. Igitur; cum ſe habeat QO. ad BQ; veluti OF. ad BO; ſive BQ. ad BO. ſit veluti QO. ad OF; erit etiam BQ^2. ad BO^2. veluti QO^2. ad OF^2. Sed etiam ob eandem proportionem continuam ipſarum BQ. BO. BF. eſt BQ ad BF; ſicuti BQ^2. ad BO^2. quare ex aequali ratione erit BQ. ad BF; ſicuti QO^2. ad OF^2. Et inde BQ. ad BF rationem duplicatam habebit illius, quam habet QO. ad OF. quod oſtendendum erat.

FIG. II. Itaque in parabola tres AM. AC. AP. ſunt ſemper continuè proportionales. Similem proprietatem parabolae narrat egregius Gregorius à S. Vincentio parte ſecunda de parabola in Lib. Quadrat. Circul. alia via demonſtratam. Nos eam adſumemus ad hoc conficiendum problema.

FIG. II. Iam vero; cum ſit AC. ad AM; uti AP. ad AC; demonſtra-
FIG. III bitur certo idem, quod in recta linea terminata BF. nuper praeſtitum eſt; eſſe in parabola $AC - AM$; ſeu MC; ad AC;
FIG. II. veluti $AP - AC$; nempe CP. ad AP. Et itaque erit MC. $AC :: CP$. AP. ſive AC. $AP :: MC$. $CP :: NC$. CD. Quare ex aequali erit NC. $CD :: AC$. AP.

PROPOSITIO I.

FIG. II. Sit data parabola EAB. cuius axis AH; ſitque datum in perimetro AB punctum N. Oportet ex N. demittere rectam NCD ad aliam perimetrum AE. ita ut intericcta CD. inter axim AH. & perimetrum AE. fiat aequalis rectae lineae datae P. Ponatur factum eſſe quod quaeritur. Et ordinatim adplicatae ſint ad parabolam rectae NM. DP. Eſt igitur in connexa ND. portio CD (*hypotheſi*) aequalis P.

Sint notae $AM = a$. & $NM = c$. atque data recta $P = CD = b$. Sit vero ignota accepta $NC = x$. Parameterque para-

ra-

rameterque parabolae denominatur p. Ergo erit $MC = \sqrt{xx - cc}$. Vnde AC erit $= a + \sqrt{xx - cc}$. atqui est propter parabolam $NC. CD :: AC. AP$. (*Lemm. III.*) Quare habebitur $x . b :: a + \sqrt{xx - cc}. \frac{ab + b\sqrt{xx - cc}}{x} = AP$. Sed est $CN. NM :: CD. DP$. Scilicet $x . c :: b . \frac{bc}{x} = DP$. atqui ob parabolam est etiam DP^2 aequale rectangulo, quod ex AP. in parametrum. Ergo erit $\frac{bbcc}{xx} = \frac{pba + pb\sqrt{xx - cc}}{x}$. Et $bcc = pax + px\sqrt{xx - cc}$. Sive $bcc - pax = px \times \sqrt{xx - cc}$. Efficiantur quadrata: & performetur more consueto aequatio: atque habebitur $x^4 - ccxx - aaxx + \frac{2bccax}{p} - \frac{bbc^4}{pp} = 0$. Quae hoc modo construetur.

Adscita sit parabola $qy = xx$. erit $qqyy = x^4$. quare si in comperta aequatione fufficiatur in locum x^4 aequalis illi $qqyy$. atque in locum xx. aequalitas qy. & efficiatur divisio per qq; enascetur $yy - \frac{ccy}{q} - \frac{aay}{q} + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq} = 0$. Et ponatur esse $\frac{-cc - aa}{q} = -m$. quare erit $yy - my + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq} = 0$.

Sit nunc parabola EAH; cuius vertex A. diameter AK. parameter $= q$. in AK fiat $AT = m$; scilicet $= \frac{+cc + aa}{q}$. FIG. IV. Ex A. excitetur AD parallela ordinatis parabolae EAH. & aequalis $\frac{bcc}{2pa} + \frac{mmpqq}{8bcca}$. Et constituatur rectangulum $DBTA$. atque vertice B. axi BTR. parametro $= \frac{2bcca}{pqq}$. designetur secunda parabola IBG. Intersecabunt sese mutuo pa-

ra-

rabolae in punctis; unde demissae ordinatae NP ad parabolam BAH erunt radices aequationis inventae; seu valores ignotae x.

Demonstratur primum per descriptionem Curvarum. Axis enim curvae unius secat axim alterius intus curvam. Ergo curvae concurrere alicubi in punctis debent. Et coëfficiens tertii termini aequationis $-cc - aa$ habet $-$. Unde subtractus ex tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini secundi; qui est nihilum; facit sane quantitatem positivam. Sed tamen tres octavae partes quadrati ex coëfficiente termini quarti scilicet $\frac{3bbc^4aa}{2pp}$; dempto producto $+bbc^6 + bbc^4aa$; quod ex postremo termino efficitur in coëfficientem termini tertii; possunt quantitatem positivam, & negativam constituere. Erit enim

$$\frac{3bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6 - bbc^4aa}{pp} = \frac{1bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6}{pp}.$$

Potest autem $\frac{1}{2}aa$. maior esse, & minor cc. Etenim est $ap = cc$. (per parabolam datam). quare si $\frac{1}{2}a$ sit maior p. erit $\frac{1}{2}aa$ maior cc. Si vero $\frac{1}{2}a$ sit minor p. erit $+\frac{1}{2}aa$ minor cc. Igitur $\frac{1bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6}{pp}$. quantitas esse potest positiva; & negativa.

Si sit illa negativa; erunt necessario radices fictitiae in aequatione (per demonstrata in algorithmo). Satis enim ad id est; ut una desit ex duabus his conditionibus dictarum quantitatum positivarum. Et etiamsi aliae insint conditiones; nihili interest. Qualis illa una est convenientiae numeri radicum verarum, & falsarum; si qui deest terminus modo fingatur adesse praefixus signo $+$. modo signo $-$. Et inveniatur dicta convenientia [per algorithmum]; sed sane id accidit inventae huic aequationi destitutae termino secundo; & ita de reliquis conditionibus; quamvis

vis illae adſint. Ergo caſus eſſe poteſt radicum impoſſibilium in hac aequatione propter unam; quae deeſt; conditionem; ut omnes radices ſint reales; licet reliquae adſint conditiones. Idem intelligendum eſt de quacumq; Algebrica aequatione. Et ratio eſt manifeſta; cum ſint conditiones neceſſariae. Itaque in hac noſtra aequatione aut duae eſſe poſſunt radices imaginariae; aut etiam omnes quatuor. Inde per algorithmum demonſtrari nequit, radices aliquas eſſe reales in ea aequatione; & problema poſſibile. Verum vero per Geometriam ſyntheticam; tum nimirum quia problema eſt poſſibile per Lemma primum ad id appoſitè praemiſſum; cùm per praedictam neceſſariam, ob deſcriptionem, interſectionem curvarum; quae demonſtratio eſt è ſola Geometria petita; radices aliquae erunt in hac aequatione reales. Igitur; ubi opus; ſyntheticae Geometriae ſubſidium in Algebricam ſuccedat.

Itaque ſi $\frac{1}{2}\, aa$ minor ſit cc; unde ſupradicta quantitas ſit negativa; uti dictum; radices quidem erunt in inventa aequatione fictitiae; ſed non omnes quatuor. Et duae erunt poſſibiles. quod oſtenſum eſt. Verum deſit terminus aliquis aequationi ipſi eidem; ſcilicet ſecundus. Igitur (*per algorith.*) radices erunt poſitivae mixtae negativis.

Hinc; ſi omnes ſint poſſibiles radices aequationis inventae; ſeu quatuor ſint interſectionum puncta in curvis deſcriptis; una erit radix falſa; aliae tres verae [per eundem]. Etenim haec convenientia talium radicum comperitur in ipſa aequatione; ſi ſecundus terminus; quo illa caret; modo ſubdatur quaſi praefixus ſigno $+$; modo quaſi ſigno $-$. Si vero duae ſolae poſſibiles ſint radices; profecto una erit vera; altera falſa.

Quod erat primum.

Sint interſectiones *N*. Et agantur ordinatae *NP*. ad parabolam *EAH*. atque *NO* ad parabolam *GBI*. Sunt *NP* tendentes ad plagam cruris *AH* parabolae $= + x$. Et *AP*. ex *A*. verſus *K* ſunt $= + y$. Hinc in poſitu averſo illae erunt $- x$. & $- y$. FIG. IV. & V.

 Per-

Perſpicuum eſt, eſſe EAH parabolam $qy = xx$.' Vbivis fiat curvarum concurſus. Sed eſt in altera parabola recta $BO = BT - OT$. aut $= BT + TO$; & $NO = PT = AT - AP$; ſive $= AP - AT$ erit $= \frac{m}{2} - y$; ſive $= y - \frac{m}{2}$; atque NO^2 eſt = rectangulo; quod ex BO in parametrum. Ergo erit $yy - my + \frac{mm}{4} = \frac{bbc^4}{ppqq}$ $+ \frac{mm}{4} - \frac{2bccax}{pqq}$; ideſt $yy - my + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq}$ $= 0$. quae ſecunda erat parabola. atqui ſunt eaedem x. & eaedem y in utraque curva. Inde in locum yy ſecundae huius parabolae ſufficiatur eius aequalitas $\frac{x^4}{qq}$ (per primam parabolam); & in locum my; ſive $- \frac{ccy - aay}{q}$ aequalitas [per eamdem] $- \frac{ccxx}{qq} - \frac{aaxx}{qq}$. Et prodibit $x^4 - ccxx -$ $- aaxx + \frac{2bccax}{p} - \frac{bbc^4}{pp} = 0$. quae aequatio inventa fuit; & quam conſtruere oportebat.

Ponatur nunc eſſe data parabola EAB illa, in cuius crure AE datum punctum N. unde ducenda linea ſit, quam vult problema.
FIG. VI. Et ſi quatuor ſint curvarum interſectiones; ſeu quatuor radices poſſibiles; ordinatim tota adplicetur ad parabolae axim AH. linea NMO. ex dato puncto N. atque ex M verſus H. contra verticem A. ſumatur ſupra AH portio MC; cuius quadratum ſit aequale exceſſui quadratorum; quae (*Fig* IV) ex minima trium radicum verarum $NP + x$. iam determinatarum fiunt; & ex data c. Eſt autem ſemper c. minor quacumque x. ſeu valore illius (*poſitione*). deinde accipiatur ſemper ex M. & ſuper eodem axi AH. alia recta MC. ſed verſus verticem A. cuius MC quadratum aequale ſit exceſſui quadratorum; quae ex alia determinata $NP + x$. (*Fig.* IV.) maiori quàm prima accepta. atque

ex

ex c. fiunt. Tum ex eodem M; pariterque versus A. abſcindatur tertia MC. cuius quadratum ſit aequale exceſſui quadratorum; quae ex maxima trium verarum radicum $NP \rightarrow + x$ fiunt; & ex eadem c. [*Fig.* IV.] Iungantur dicto ordine $CN. CN. CN$. & protrahantur donec ſecent in D. perimetrum parabolae: & erunt interceptae CD. aequales ſingulae datae rectae P; ſeu b. Id enim poſitum eſt. Et tertia MC cadet extra parabolam A. Ita enim inter axim AH, & perimetrum AB una CD. infra NMO, & una CD. ſupra NMO cadet eidem datae rectae aequalis (*Lemmat. II.*). Atque ob tertiam MC. cuius punctum C. cadit extra parabolam; ſecabit tertia CN. perimetrum AB. convexam in D parabolae. Quod erat ſecundum. *Q. F. O.*

PROPOSITIO II.

Sint quae prius. Poteſt punctum manere etiam datum in alio parabolae crure AB. uti in K. & idem quaeri: & huic caſui etiam ſatisfacit, reſpondetque analyſis; quem per quartam radicem falſam $- x$. determinavit. Igitur accipiatur in axi FIG. VI.

AH. portio $AI = \frac{cc}{p}$. Et iungatur IK. Erit $IK = c$. ob parabolam. Sit nunc IQ aut verſus verticem A. aut verſus H; ut lubet; cuius quadratum ſit aequale exceſſui quadratorum; quae efficiuntur ex NP; nempe $- x$. (*Fig.* IV.) poſita ex N verſus B. atque ex ipſa c. Et iungatur QK. quae protrahatur ad perimetrum parabolae in D. Et erit QD aequalis eidem datae rectae P; ſeu b. id enim poſitum eſt. Eritque QK (*propoſit. I.*) aequalis dictae NP (*Fig* IV.) $= - x$. FIG. VI.

PROPOSITIO III.

Sint eadem. Sed interſectiones curvarum fiant duae; duaeque radices ſint poſſibiles; & eadem peragenda ſunt. Quoniam ordinata ſit ex puncto N. ſupra perimetro AE dato recta NM ad parabolam; atque ſuper AH verſus verticem A. curvae accipiatur una MC aequalis exceſſui quadtatorum; quae ex $NP \rightarrow + x$. FIG. VI.

 (*Fig.* V.)

[*Fig.* v.] tendente ex N versus crus AH parabolae fiunt; & ex data c. & coniuncta CN, productaque ad perimetrum parabolae in D. continebit partem $CD = P = b$. Deinde; cum altera
FIG. VI. radix sit necessario falsa (*per algorith. proposit. I.*) accipiatur super AH portio $AI = \frac{cc}{p}$. uti in praecedenti; & coniuncta IK erit $= c$. Sitque recta IQ ubivis; veluti in antecedenti; sumpta; cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex altera $NP = -x$. contendente ex N (*Fig.* v) versus crus AE parabolae; atque ex data c. fiunt. & iuncta QK, protracta-
FIG. VI. que ad perimetrum parabolae habebit portionem QD aequalem datae rectae $P = b$. Eritque $KQ = NP$ [*Fig.* v.] $= -x$. (*proposit.* 1.) Haec enim posita sunt.

S C H O L I V M.

Quod Lemma secundum demonstrabat de Parabola, eodem omnino modo demonstrat de hyperbole cum axi.

PROBLEMA IX. GEOMETRICVM.

L E M M A. I.

PROBL. IX. Sit Circulus $ACBD$. cuius data positione diameter BA (*Fig.* I. II. III. IV. & V.) Et Centrum sit E. per quod ducatur ad normam diameter CD. Erit divisus circulus in quatuor quadrantes AED. BED. AEC. BEC. Datum super unius ex illis circumferentia AD. sit punctum N. Non inclinabuntur ex N duae NSO. NRP. ad aliam circumferentiam usque alterius quadrantis; ita ut inclusae SO. RP. inter diametrum positione datam AB. & ipsum quadrantem; uti AEC; sint eidem datae rectae lineae aequales. Quae recta aut maior sit, aut minor radio: erit sane minor diametro. Igitur de duabus rectis lineis non aequalibus agitur in uno, & eodem quadrante manentibus.

FIG. I. I. Sint enim duae rectae NP. NO. accepto quadrante AEC. concurrentes ambae cum diametro CD. ad partes quadrantis AED.

Igi-

Igitur erit angulus *NRE*. acutus; cum per Element. Geometriae debeat angulus *NRE*. cum *DER* efficere angulos duos minores duobus rectis, ob concursum (*hypoth.*) lineae rectae *NP* cum recta *CD*. ad partes quadrantis *AED*; & cum sit angulus *DER*. rectus (*constructione*). Ergo erit angulus *NSE*; sive *NSR*. acutus in triangulo *NSR*. tum quia *SN* concurrit etiam cum recta *CD*; cùm etiam quoniam est in dicto triangulo angulus *NRS*. obtusus. Sed tota una recta *NO*. est minor altera *NP*. (deducitur ex 15. III. Element.) Et quidem illa est minor; cuius pars *NS*. est maior parte *NR*. alterius maioris. Igitur reliqua *SO*. erit necessario minor reliqua *RP*. FIG. I.

II. Ex eodem puncto *N*. ductarum *NP*. *NO*. una *NP*. propior quàm altera ad diametrum *CD*. sit parallela eidem diametro: quare altera *NO*. superior occurret diametro *CD*. ad partes eiusdem quadrantis *AED*. Et per Elem. Geometr. uti num. I. erit angulus *NSE*. sive *NSR* acutus. Quare erit *NS* maior etiam *NR*. Et reliqua, uti antea. FIG. II.

III. Sit una *NO*. remotior quàm altera *NP*. à diametro *CD*. parallela eidem *CD*. ambae sint semper ex eodem puncto *N*. ductae. Et occurret altera *NP*. eidem diametro *CD*. ad partes quadrantis *AEC*. Igitur ducta ex *E* normalis *EI*. in *I*. supra ipsam *NP*. cadet intus eundem quadrantem *AEC*. propter angulum *PRE*. supra dicta ratione Element. Geometr. acutum. Itaque erit *PI*. maior, quàm *OS*. Et longe magis *PR*. maior quàm *OS*. Nam est *NP*. maior *NO* (deducitur ex 15. III. Elem.) Inde *PI*. maior erit *OS*. FIG. III.

IV. Cadat una *NO*. in quadrantem *AEC*. ita ut conveniat cum *CD*. ad plagam quadrantis *AED*. & cadat altera *NP*. ex eodem *N*. ita ut conveniat cum *CD*. ad plagam contrariam. Sitque *NO*. remotior quàm *NP*. à diametro *CD*. Profecto perpendiculum ex *E*. ductum *EI*. supra *NP*. cadet in plaga concursus duarum *NP*. & *DC*. Et perpendiculum *EM*. ex eodem *E*. supra *NO*. incidet in plaga concursus duarum *NO*. & FIG. IV.

CD.

CD propter angulos PRE. & NSE. eadem ratione Element. Geometr. ſicuti num. 1. acutos. Igitur perpendicula cadent hinc; & hinc à ſemidiametro BA. ſed eſt PI maior OM; cum ſit NP. maior NO. ſicuti num. 1. dicebatur. Hinc longe magis PR. maior erit OM. atque magis, magiſque PR. maior erit OS.

FIG. V. V. Ambae NO. & NP. ex eodem N. ductae occurrant diametro CD. in plaga quadrantis AEC. Agatur ex P. parallela PT. ipſi BA. Eſtque NP. propior ad diametrum CD. quàm NO. Vnde circuli ordinata PH. maior erit quàm ordinata OK. Sequitur ex communi demonſtratione 15. III. Elem. Et ipſa PT. cadet extra circulum; ubi occurrat rectae NO. in T. Erunt anguli PRE. & OSE per Elem Geometr. acuti. Quare in triangulo RNS. obveniet latus NR. maius latete NS. ſed eſt NR, ad NP; ſicuti NS. ad ST. quare erit RP. recta maior ST. Et longe magis maior quàm SO.

FIG. V. VI. Sumatur quadrans CEB. Et idem etiam demonſtrabitur pro hoc quadrante inferiori ad illum, in cuius circumferentia datum eſt N. Quoniam agatur diameter NEM. Et ducantur NO. & NP. ex eodem N. in hunc quadrantem; quae incidant illuc in parte ſemicirculi NCM. Secet autem NO diametrum CD. in S. & ſecet NP. eandem CD. in R atque diametrum ſane aliam AB. in T. Erit ob angulum AEC. (*hypoth.*) rectum, angulus TRE acutus in triangulo TRE. Hinc angulus TRS. ſeu NRS. erit obtuſus in triangnlo NRS. & NS. erit maior NR. ſed per ſaepe dicta in ſuperioribus eſt NO. minor NP. propiore ad diametrum NEM. Ergo erit neceſſario SO. minor RP. Sed hic caſus vere huius Lemmatis non eſt; uti dicetur.

FIG. EADEM VI. Cadant nunc aedem NO. & NP. in eundem quadrantem CEB. in parte ſemicirculi NDM. & ſecet NP. diametrum CD. in R. atque diametrum AB. poſitione datam in T. Et ſecet NO. eandem AB in I. Nunc ſimili ratione ac antea n. VI. oſtendetur NI maior NT. ſed eſt NO remotior à diametro NEM. minor per ſaepe dicta quàm propior NP. Igitur erit neceſſario IO. minor TP.

TP. Idem simili modo demonstrabitur pro quadrante *BED*, ac demonstratum est pro quadrante *AEC*. (*Fig.* I. II. III. IV. & V.) verùm in demonstratione pro diametro positione data accipienda est *CD*; & pro alia diametro sumenda est *AB*. Et cetera uti antea. Hinc casus hic non est huius ipsius Lemmatis; immutatur enim diameter positione data. Et eadem ratione non est huius ipsius Lemmatis casus numeri VI. qui pertinet ad casum numeri VII. cum nempe data est positione diameter circuli *AD*. non *AB*. Agit enim Lemma de una positione data diametro non immutata: &; uti numero I. dictum est; de lineis duabus non aequalibus in uno, & eodem quadrante locatis. Neque alii sunt casus. Igitur a duobus quadrantibus inferioribus aut uno, aut altero (*Fig.* I. II. III. IV. & V.) idest à semicirculo *ACB* inferiori non tendent in circulo dato ad idem punctum uti *N*. datum in peripheria quadrantis, sive semicirculi *ADB* superioris rectae duae, uti *PN*. & *ON*. quarum partes *OS*. & *PR*. intercisae à diametro positione data, & peripheria semicirculi, vel quadrantis inferioris. manentesque in uno, & eodem quadrante esse possint eidem rectae datae; quae aut minor, aut maior sit, quàm Circuli radius; aequales *Q. E. D.*

L E M M A II.

TAB. VII. PROBL. IX. FIG. VI.

Sit Circulus *AOBD*. in cuius circumferentia datur punctum *N*. Eius centrum sit *Q*. Et data sit positione diameter *AQB*. ducta sit per *Q* ad normam diameter alia *QOD*. Hinc divisus circulus erit in quatuor quadrantes *OQA*. *OQB*. *DQB*. *DQA*. In uno quorum *DQA*. insidit supra circumferentia datum punctum *N*. dico; ex puncto *N* unam solam inclinari rectam *NCP*. intus quadrantem *OQA*; ita ut intercepta *CP*. inter diametrum positione datam *AQB*; & circumferentiam, atque manens tota intus quadrantem sit aequalis semidiametro circuli. Demonstratur eodem plane modo; quo Lemma praecedens. In illius enim demonstratione nusquam putatae sunt rectae lineae totae intus quadran-

dran-

drantem comprehensae inter diametrum datam, & circumferentiam Circuli; & quae nequeunt esse eidem datae rectae aequales; fore maiores, vel minores radio eiusdem Circuli.

FIG. EADEM. Aliter. Non enim; sed sit alia *NEM*; cuius definita pars intercepta *EM* sit circuli radio aequalis tota intus quadrantem. Iungantur *MQ*, *PQ*. Erit (*hypothesi*) angulus $PQC = PCQ = ECN$. Item (*hypothesi*) erit angulus $MQE = MEQ$. Sed angulus *PQC*. est maior angulo *MQE*. Profluunt enim rectae *NCP*. & *NEM*. ab eodem puncto *N*; atque incidunt *CP*. *EM*. intus eundem quadrantem (*hypothesi*); unde una sit propior ad diametrum *OD*. quàm altera. Ergo ang. *PQC*. erit maior *MEQ*. sive *MEC*. sed erat $PQC = ECN$. Inde *ECN*. ang. internus erit maior externo *MEC*. Quod à ratione maximè abhorret.

Dico secundo; ex eodem puncto *N*. non inclinari intus alium quadrantem *OQB*. nisi solam diametrum *NQH*: cuius portio *QH* interclusa per centrum inter eandem positione datam diametrum *BQA*, & circumferentiam; atque manens tota intus quadrantem sit radius circuli.

Non enim; sed sit alia demissa *NIK*. ex *N* intus dictum quadrantem; cuius portio definita *IK*. sit radio circuli aequalis tota intus quadrantem. Connectatur *KQ*. Erit angulus *KQI* [*hypoth.*] aequalis *KIQ*. sed *KQI* est minor recto; Ergo minor erit recto *KIQ*. Inde maior recto erit *NIQ*. atque est minor recto *AQN*. Vnde maior recto *NQI*. Et igitur in triangulo *NQI*. anguli duo in *Q*. & *I*. erunt singuli maiores recto; seu obtusi. Quidnam vero isthuc monstri erit?

FIG. EADEM

SCHOLIVM.

Perspicuum est, in secunda demonstratione huius Lemm.is contineri casus omnes positionum diversarum; quas lineae praedictae *NM*. *NP*. accepto quadrante *OQA*; possunt obtinere: illique sunt iidem cum expositis; uti liquet; in Lemmate praecedenti. Nam in demonstrationem secundum huius Lemmatis nullum iniit medium elementum in aliqua dictarum positionum innixum.

PROPOSITIO I.

SIt in dati Circuli ADI. circumferentia datum punctum N. FIG. VII. oportet ex N. demittere rectam NM ad aliam circumferentiam; ita ut eius portio CM. conclusa inter diametrum positione datam BA. & circumferentiam sit aequalis datae rectae linae P. liquet P. esse debere diametro minorem. Pertractatum ab aliis est problema; sed; quod norim; de sola interclusa CM, quae sit aequalis radio. Generalius igitur hic illud proponitur; & nostris solutionibus, & demonstrationibus quivis casus problematis conficietur.

Ponatur factum esse quod quaeritur. Demittantur ex N. & M. ordinatae circuli NO. MP. ad diametrum BA. Cadere posset NO aut in circuli centrum Q. aut extra. Cadat extra. Dicetur in prop.ne VII. de alio casu faciliori. Cadet autem semper inter punctum C. & B. ipsa NO; cum sit circuli ordinata. Dividetur igitur BA. in duo inaequalia BO. OA. sit OA. pars maior. & OB. pars minor. Erit OB. minor radio. & OA maior eodem radio. Inde per circulum erit OB. minor ON. quae quidem ON est minor radio (*hypoth.*).

Dictae sint datae, & cognitae BO. c. & ON. d. & circuli diameter AB. a. Ignota vero sit BC. & denominetur x. Erit $CA = a - x$. Et $OC = BC - BO$ erit $= x - c$. data vero P. adpelletur $b = CM$. Nunc est per circulum $AC \times CB = NC \times CM$. quare erit $ax - xx = NC \times b$. Inde fiet $NC = \frac{ax - xx}{b}$.

Sed est CN. NO :: CM. MP. Igitur erit $\frac{ax - xx}{b}$. d :: b. MP. Hinc MP erit $= \frac{bbd}{ax - xx}$. atqui est quoque NO. OC :: MP. PC. nempe d. $x - c$ :: $\frac{bbd.}{ax - xx}$. PC. Quadere PC

K effi-

efficietur $= \frac{bbx - bbc}{ax - xx}$. Sed eſt $MC^2 = MP^2 + PC^2$. Quare erit $bb = \frac{b^4dd + b^4cc - 2b^4cx + b^4xx}{aaxx - 2ax^3 + x^4}$. atque $bbx^4 - 2abbx^3 + aabbxx = b^4dd + b^4cc - 2b^4cx + b^4xx$. Inde conformata aequatio erit $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. Conſtruetur autem ſic.

Adſciſcatur parabolicus locus $ax - xx = by$. Et erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = bbyy$. Subſtituatur $bbyy$ in aequatione inventa loco huius, quam habet, aequalitatis: & habebitur $yy - xx + 2cx - dd - cc = 0$. quae hyperboles eſt aequilatera. Modo ſit $AI = \frac{aa}{4b}$, atque vertice A. diametro AIS. parametro $= b$. deſcribatur parabola TAL. deinde per I. agatur DIB parallela ordinatis deſcriptae parabolae. Et ſit $DB = 2d$. diviſaq; bifariam in O. Accipiatur in DB. ex O verſus B. portio $OC = c$. atq; ex C. verſus parabolam AT ſumatur $CI =$ ſemidiametro dati Circuli $= \frac{a}{2}$. & diametro ſecunda DB. deſcripta ſit hyperboles aequilatera KFR cum ſua oppoſita HEG. ordinatas habens parallelas ipſi AIS. Dico primo; has duas curvas mutuo interſectum iri. Secundo; interſectiones fore in punctis; unde ordinatae deductae PN ad DOB praebebunt abruptas ſupra ipſa DB. radices CN. aequationis inventae, ſeu valores ignotae x. Tertio; (quod tertium propoſitione inſequenti demonſtrabitur) aut quatuor, aut duas eſſe interſectiones: inde aut quatuor, aut duas eſſe iuxta hanc problematis ſolutionem radices aequationis inventae. Demonſtratur primum. Nam per deſcriptionem diameter parabolae, & diameter ſecunda hyperbolis ſeſe interſecant. Igitur Curvae mutuo concurrere in punctis debent. Et $aa - bb$ coëfficiens tertii termini aequationis inventae ſubtractus ex tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini ſecundi; ſcilicet

FIG. IX.

cet ex $\frac{3}{2}$ aa facit sane quantitatem positivam. itemque tres octavae partes quadrati ex coëfficiente termini quarti; nempe $\frac{3}{4}$ b^4cc; dempto producto $-aabbdd - aabbcc + b^4dd + b^4cc$; quod ex postremo termino fit in coëfficientem termini tertii; constituunt (*constr.*) pariter quantitatem positivam $\frac{3}{4}$ $b^4cc + aabbd + aabbcc - b^4dd - b^4cc$. quae duae conditiones sunt; alterutra quarum si desit; non deest autem hic ulla; radices erunt in aequatione quarti gradus fictitiae (*per algorith.*). Quare; cum demonstretur has curvas necessario sese interseeare per descriptionem; ratum, firmumq; semper iterum fiet, quod demonstrat de radicibus fictitiis aequationum quarti gradus ipse algorithmus. (*Schol. proposit. unicae problem. II. Et alibi*). Quod erat primum. Sunt verò (*per eumdem algorith.*) tres radices verae, una falsa; modo sint omnes quatuor possibiles.

Demonstratur secundum. Demittantur ordinatae PM ad parabolam, & PN ad diametrum secundam hyperbolis ex intersectionibus P. duarum curvarum. Sunt CN ex C versus P. $+x$. Scilicet radices verae. atque NP ex N versus A. parabolae verticem sunt $+y$. Inde CN ex C versus B. erit radix falsa $-x$. Et ipsae NP. ex N ad plagam aversam eidem A. erunt $-y$. Sed ob parabolam est PM^2; scilicet $\overline{CI - CN}^2$; vel $\overline{CN - CI}^2$; aut $\overline{IC + CN}^2$; idest $\frac{aa}{4} - ax + xx$; aequale rectangulo, quod ex AM fit, sive ex $AI - IM$; vel $AI + IM$ in parametrum b. quare erit $\frac{aa}{4} - ax + xx = \frac{aa}{4} - by$; inde $by = ax - xx$. Quae parabola fuit inducta. Atqui ob hyperbol.^{m} aequilateram habetur $PN^2 = ON^2 + DO^2 = \overline{CN - CO}^2 + DO^2$; vel $= \overline{CO + CN}^2 + DO^2$. Igitur erit $yy = xx - 2cx + cc + dd$; inde $yy - xx + 2cx - cc - dd = 0$. Qui locus fuit hyperbolicus. FIG. EADEM.

 Et

Et ſunt eaedem x. & eaedem y in utraque curva. quare ſi in hyperbole in locum yy. ſuccedat eius aequalitas; quam deſcripta praebet parabola; prodibit aequatio $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. quae erat conſtruenda.

Iam vero ſi omnes radices aequationis ſint poſſibiles; quod eveniet, ſi curvae in quatuor punctis ſeſe ſecabunt; erunt iuxta ſucceſſionem ſignorum $+$; aut $-$. in inventa aequatione radices tres poſitivae, & una negativa (*per algorith.*). ſi autem duae ſint interſectiones; unde radices aequationis duae poſſibiles; erunt autem certè duae; curvae enim; uti dictum; ſeſe neceſſario interſecant; tunc ſane radix una erit poſitiva; altera negativa. Nam aequationis termini non ſunt omnes poſitivi; ſeu praefixi ſigno $+$. itemque non comperitur in illis conſecutio ſignorum $+$; & $-$. quare (*per algorith.*) radices verae ſunt falſis immixtae. Et inde patet quod dicitur.

FIG. IX. & VIII. Itaque; ſi interſectiones quatuor ſint curvarum, & inde radices aequationis quatuor; ſumantur ordine ſuper dati circuli diametro BA. ex B. verſus A. una BC. aequalis minimae CN. ex determinatis ſupra BD. & tendentibus ex C. verſus parabolam AT. quae minima CN. eſt minor $CI = \frac{a}{2}$. ſeu radio BQ. circuli dati (*per deſcriptionem curvarum; & conſtruction.*) deinde alia BC. aequalis ſecundae CN, quae ratione eadem eſt maior radio BQ; atque tertia BC aequalis maximae CN; profecto maiori quàm ipſe radius BQ. eadem ratione. Poſtea in plaga averſa ipſi A. accipiatur quarta BC. aequalis CN; ſitae ex C. verſus parabolam AL. & illae CN fuerunt $+x$. haec vero poſtrema fuit $-x$. Et (*Fig.* VIII.) iungantur puncta C. & N. & CN. protrahantur ad circuli peripheriam in M. eruntq; ſingulae CM. aequales datae rectae P. ſive b. id enim poſitum eſt. atqui intus unum quadrantem BQP; & unum AQP. una locabitur recta tendens ad idem punctum N. datum in ſuperiori quadrante BQI. aequalis rectae datae (*Lemm. I.*) Ergo ex B verſus A. duae BC. manebunt in-

tus

tus circulum; & tertia BC. extra illum. Ita enim una CM. & una CM in uno; & altero quadrante BQP. & AQP. posita erit aequalis rectae datae. Indeque ipsarum CM. tres pertingent ad curvamen circuli cavum, & una ad convexum, singulae $= P = b$.

Si autem duae sint curvarum intersectiones; tunc super eadem diametro BA circuli dati sumatur una BC. ex B. versus A. aequalis determinatae $CN + x$. ex C. scilicet tendenti versus D. & quae CN. est maior CI. seu circuli radio BQ. [*per descriptionem curvarum; & construction.*] deinde altera accipiatur BC. in plaga aversa ipsi A. aequalis alteri $CN - x$. tendenti ex C. versus B. atq; coniungantur (*Fig.* VIII.) CN. protractae usque ad peripheriam circuli in M. Et erunt singulae CM aequales rectae datae P. seu b. Id enim positum est. Ambae vero ad circulum pertinebunt cavum. Quod erat secundum. FIG. VIII. & X.

PROPOSITIO II.

Demonstratur nunc quod erat tertium propositionis praecedentis. Sint omnia quae antea. Quatuor esse possunt intersectiones curvarum iuxta hanc problematis solutionem; & etiam duae. Demonstratur. Ducatur ex F vertice hyperbolis KFR parallela FL ipsi BID. secans AI in L. Erit $FO = LI$. Est FO. semidiameter coniugata curvae; & aequalis BO (*per descriptam hyperbolem aequilateram*) $= d$. (*costruction.*) Est autem d. ordinata circuli dati; & minor (*hypoth.*) semidiametro $\frac{a}{2}$. circuli. Deinde b. recta data est minor diametro a. sed esse potest maior; aut minor quàm $\frac{a}{2}$; non quidem illi aequalis (*hypoth.*). atque est $AI = \frac{aa}{4b}$. [*Construction.*] FIG IX. & X.

Nunc sit $a = 7$. & $b = 4$. inde b erit minor a; sed maior $\frac{a}{2}$.

Et

Et erit $AI = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16}$. Inde AI erit minor $\frac{a}{2}$ seu radio. quare si d. sit $= 3$; erit $FO = 3$. Et inde FO, seu IL minor quàm AI. aut si d. sit $= 3 + \frac{1}{16}$; erit $FO = 3 + \frac{1}{16}$. & igitur FO. seu IL aequalis erit ipsi AI. Hinc primo casu erit LI. minor AI.

FIG. IX. & X. secundo vero erit $LI = AI$. Igitur secundo casu vertex A. parabolae incidet in L. & non secabit parabola nisi in duobus punctis unam hyperbolem HEG. sed primo casu idem vertex cadet supra L. & parabola potest secare curvam hyperbolicam in duobus; aut in quatuor etiam punctis.

FIG. IX. & X. Modo sit pariter $a = 7$. sed $b = 3$. inde b erit minor a; & minor $\frac{a}{2}$ atq; erit $AI = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12}$. Et inde AI erit maior radio $\frac{a}{2}$. & igitur longe magis maior erit quàm d. seu quàm FO; vel IL. Et vertex hoc etiam casu ita ibi manere potest positus; ut parabola secet curvam hyperbolicam aut in duobus; aut etiam in quatuor punctis; uti antea. Igitur patet quod propositum est; quatuor esse posse curvarum intersectiones, aut etiam duas: indeque quatuor esse aequationis radices; aut duas. Quod erat tertium.

PROPOSITIO III.

FIG. IX. Sint omnia quae antea. Fuit recta CI. in praecedenti constructione propositionis primae minor quàm DB. nempe fuit dati circuli semidiameter $\frac{a}{2}$. minor $2d$, seu (*Fig.* VII.) minor $2NO$. Potest autem esse maior $\frac{a}{2}$ quàm $2NO$; seu quàm dupla ordinata. Si sit (est vero semper [*Fig.* IX.] CI. maior BO. nempe est simplici ordinata NO; seu d. (*Fig.* VII.) radius $\frac{a}{2}$ semper maior; non est enim ordinata NO. radius circuli, uti praefati sumus

mus); tunc accipiatur in analysi (*propos. I. Fig.* VII.) pars data maior AO; non vero pars data; uti ibi sumebatur; minor BO. ex duabus; in quas dispertitur diameter BA. Itaque dicatur tunc AO. c. Ergo erit $AO = c$. maior radio $\frac{a}{2}$ (*construction.*) & per circulum maior quoque quàm $ON = d$. Et plane eadem evadet aequatio $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. Quae simili modo cònstruetur. FIG. VII. FIG. XI. & XII.

Quoniam sit constructio; uti supra (*proposit. I.*) & sit $DB = 2d$; atque divisa bifariam in O. Verùm sumatur in DB. sed protracta ad partem B. recta $IC = c$. Et recta $OC = \frac{a}{2}$. quae OC. minor quidem erit quàm IC. seu c. (*constrution.*); sed maior quàm DB. seu $2d$. [*hypothesi*]. Erit etiam CI; seu c. maior quàm BO. seu d. (*construction.*) Et reliqua sicuti in superioribus (*propositione I.*). Et valent etiam hoc casu, quae propositione II. praecedenti demonstrantur. Non enim ibi accepta fuit aut pars maior AO. aut minor BO. [*Fig.* VII.] duarum, in quas divisa erat diameter AB (*proposit. I.*) circuli in analysis contextu. Itemque ibi posita fuit ordinata $NO = d$. minor radio circuli. Ergo patet quod propositum est.

PROPOSITIO IV.

Sint pariter omnia, quae antea. Sed quaeratur interclusa CM [*Fig.* VII. *proposit. I.*] inter diametrum positione datam BA. & circumferentiam aequalis radio, tendens quidem ad datum punctum N. in alia circumferentia.

Instituenda est omnino eadem analysis; quae in eadem propositione I.. Accipiatur autem non pars maior AO; sed minor BO; pariter uti ibidem; ipsarum duarum, in quas diameter BA. ab ordinata data NO. dividitur. Igitur sit $BO = c$. sicuti illic efficitur. Item ponatur ipsa ordinata NO. non esse circuli radius. FIG. VII.

dius.

dius. de quo casu dicetur propositione VIII. Et reliqua uti ibi (*propositione* I.) Ergo si in aequatione $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbcc - bbdd = 0$. subeat $\frac{aa}{4}$ in locum bb; reddetur illa $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{aacx}{2} - \frac{aacc - ddaa}{4} = 0$. Construetur autem ea sic.

Arcessitus sit parabolicus locus $ax - xx = ay$. Vnde erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = aayy$. & vice $x^4 - 2ax^3$ sufficiatur haec eius aequalitas $aayy - aaxx$ in inventa aequatione; & reddetur illa $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. Sed etiam ob eundem arcessitum locum parabolicum erat $-\frac{x^2}{4} = \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4}$. Igitur si in $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. vice $-\frac{xx}{4}$. sufficiatur haec eius aequalitas $\frac{ay - ax}{4}$; habebitur quoque $yy + \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$

TAB. VII. & VII. Qui locus alter est ad parabolam.

FIG. XIII. Sit nunc recta $AI. = \frac{a}{4}$. Et vertice A. diametro AIS. parametro $= a$. describatur parabola BAE. Nunc agatur per I. parallela KID. ordinatis descriptae parabolae. & sit in KID recta $IC = \frac{a}{2}$; sive aequalis dati circuli radio. atque in posi-

FIG. VII. tu contra punctum I. efficiatur $CD = \frac{dd + cc}{a - 2c} + \frac{aa}{16 \times a - 2c}$.

FIG. XIII. Est quidem a maior $2c$. cum sit BQ. seu $\frac{a}{2}$ maior (*hypoth.*) quàm BO; sive quàm c. Deinde ex D. educatur ipsi AQ. paral-

ralicla DT; & $= \frac{a}{8}$. Et agatur TG. parallela DIK. atque vertice T. diametro TG. ordinatisque; quae sint aequidistantes diametro AIS primae parabolae; atque parametro $= \frac{a - 2c}{4}$ describatur secunda parabola HTF. dico primo; has duas curvas sese interfecare in punctis; unde; secundo; demissas rectas parallelas AIS abscindere in DH radices inventae aequationis, seu valores ignote x; atque; tertio; parabolae HTF semitam pervadere per verticem A alterius parabolae BAE. &; quarto; ipsam BAE. traiici per datum punctum C. quod determinatur in constructione aequationis inventae contexenda (*proposit. I.*). Demonstratur primum per descriptionem curvarum. Diameter enim TG unius curvae secat diametrum AIS. alterius intus Curvam.

Demonstratur Secundum. Quoniam sint puncta interfectionum P; unde ordinentur PM. ad primam descriptam parabolam; & PO. ad secundam; quae PO secent DK in N. Sunt CN ex C versus $K = + x$. Et PN ex P versus verticem A. sunt $+ y$. Hinc in locis contrariis erunt illae, $- x$. & istae $- y$ a qui ob parabolam BAE est PM^2; sive $\overline{CI - CN}^2$; vel $\overline{CN - CI}^2$ aut $\overline{CI + CN}^2$, aequale rectangulo; quod ex AM; nempe $AI - NP$; aut $AI + NP$ efficitur in parametrum a. Ergo erit $\frac{aa}{4} - ax + xx = \frac{aa}{4} - ay$. Scilicet $ax - xx = ay$. qui novus inlatus fuit locus ad parabolam.

Post hac; ob alteram parabolam HTF; est PO^2. sive $\overline{PN + NO}^2$. aut $\overline{PN - ON}^2$ aequale rectangulo; quod ex OT; sive ND; idest ex $DC + CN$; vel $DC - CN$ constituitur in parametrum $\frac{a - 2c}{4}$. Igitur habebitur $yy + \frac{ay}{4} + \frac{aa}{64} = \frac{dd + cc}{4} + \frac{aa}{64}$

$\frac{aa}{64} + \frac{ax - 2cx}{4}$. Ergo erit $yy + \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = o$. qui alter erat locus ad parabolam. atqui sunt in utraque curva eaedem x. & eaedem y. Igitur loco $\frac{ay}{4} - \frac{ax}{4}$ sufficiatur in hac aequatione aequalitas illius $- \frac{xx}{4}$ (per primam inlatam parabolam); & erit $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = o$. tum [per eandem parabolam] habetur quoque $yy = xx - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^4}{aa}$. Quamobrem; si yy in hanc aliam suam demutetur aequalitatem; exorietur $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{caax}{2} - \frac{aadd}{4} - \frac{ccaa}{4} = o$. quae inventa aequatio fuit; & erat construenda.

Habet autem illa (*per algorith.*) radices tres veras, unam falsam: si omnes sint possibiles. Possunt autem esse. Quod infra cognoscetur. [*proposit. V.*].

FIG VIII. X III. Iam vero sint intersectiones quatuor curvarum, & inde quatuor aequationis reales radices. Itaque supra BA. accipiantur ordine ex B. versus A. rectae BC. quarum prima sit BC. aequalis minimae CN ex determinatis supra DIK. & tendenti ex C. versus parabolam AB. Secunda sit radius $BQ = CI$. Est quidem $CI = \frac{a}{2}$, seu aequalis radio; (*proposit. I.*); & tertia BC. sit aequalis CN. pariter contendenti ex C versus parabolam AB. & maiori quàm prima CN. & quàm CI; seu quàm radius BQ. Et quarta BC. sit aequalis CN. in positu contrario prae reliquis; scilicet ex N. vergenti ad parabolam AE. Et sunt prima recta BC. radiusque BQ. & tertia BC locatae in eadem plaga ex B. versus A: inde respondent tribus radicibus $+ x$. positivis inventae

FIG. VIII. aequa-

aequationis. atque quarta BC. contrariè sita; uti dictum est; convenit radici falsae $-x$. eiusdem aequationis.

Nunc adiungantur rectae CN. radiusque. QN. ad datum punctum N. Et producantur ad circumferentiam in M. Et erunt rectae CM. QM. CM. ex B versus A; (sed recta tertia CM. cadet extra circulum; uti dicetur); atque CM. in positu contrario aequales singulae radio dati circuli $BNAP$. Id enim positum est. atqui una intus unum quadrantem BQP. & una intus AQP. locabitur recta tendens ad idem punctum N. datum in superiori quadrante BQI. aequalis radio (*Lemm. II.*). Ergo duae nempe BC. minor radio; ex dictis; & altera scilicet ipse radius BQ ex B versus A. tendentes manebunt intus circulum. & duae BC. una ex B. versus A; & altera in plaga aversa locabuntur extra circulum. Ita enim una CM in quadrante BQP. & una QM; nempe radius; in quadrante AQP. posita erit; aequales singulae radio: atq; ambae pertinebunt intus circulum ad cavum illius curvamen: & duarum CM. extra circulum positarum pertinget una ad convexam, altera ad cavam peripheriam. Quod erat secundum. FIG. VIII.

Cum sit AI (*constructione.*) $= \frac{a}{4}$. Et a sit parameter parabolae BAE; unde I. foret focus; si AIS. axis; profecto quadratum ordinatae ex I ductae ad parabolam AE erit $= \frac{aa}{4}$. Igitur ordinata erit $\frac{a}{2}$. sed est $IC = \frac{a}{2}$. Ergo C. manet in curva AE. Quod erat Tertium. FIG XIII.

Deinde una recta determinans quaesitam CM. aequalem radio est ipsemet BQ. radius. atqui BC. fuere supra BA. rectae illae determinantes praedictas CM. & fuerunt $+x$. atque in omni aequatione adhibita ad constructionem est eadem $+x$. Quare sumatur aequatio $xx - ax = ay$. in qua fiat x aequalis radio $\frac{a}{2}$. eritque $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} = ay$. Inde erit $y = \frac{a}{4} =$ (*per fabricam*) FIG. VIII.

L 2 AI.

FIG. XIII. AI. Et sunt rectae $PN + y$ illae, quae ex concursu curvarum ducuntur supra $DCIK$ parallelae ipsi AI. Ergo concurrent curvae in vertice A. parabolae BAE. Et alterius parabolae semita FT. traiicietur per A.

FIG. XIII. Demonstratur id aliter. Occurrat AI ipsi TG in R. Nunc
FIG. VII. est $BO = c$. atque $NO = d$. Igitur erit $dd = ac - cc$ [*per Circulum*] & inde $\frac{dd + cc}{4}$ erit $= \frac{ac}{4}$. atqui erit ordinata AR
FIG. XIII. parabolae FTH; si transit illa per verticem dictum A; aequalis $AI + IR = AI + DT = \frac{a}{4} + \frac{a}{8}$ (*per fabricam*) $= \frac{3a}{8}$. Itaque AR^2 erit $= \frac{9aa}{64}$. Et esse idem AR^2 debet aequale rectangulo, quod ex RT in parametrum $\frac{a - 2c}{4}$. constituitur ob ipsam parabolam FTH. Est autem $\frac{9aa}{64}$ reapse aequale huius rectangulo. Nam est $RT = ID = IC + CD = \frac{a}{2} + \frac{dd + cc}{a - 2c} + \frac{a2}{16a - 32c}$. Igitur conficiatur dictum rectangulum; & illud erit $\frac{dd}{4} + \frac{cc}{4} + \frac{aa}{64} + \frac{aa}{8} - \frac{ac}{4}$. Sed est $\frac{dd + cc}{4} = \frac{ac}{4}$. Quare erit illud rectangulum $= \frac{aa}{64} + \frac{aa}{8} = \frac{9aa}{64}$. Et inde erit AR^2 aequale illi rectangulo. Et curva parabolica FT. perducetur per A. verticem alterius parabolae. Quod erat quaerendum *Q. E. O.*

PROPOSITIO V.

FIG. XIII. **S**I punctum T. vertex parabolae FTH. incidat; uti hactenus; extra parabolam aliam AE. aut supra illam; quatuor erunt concursus curvarum iam determinati. Si cadat intra parabolam AE; tunc non nisi duo erunt occurrsus; unus in vertice A. alter in P. intus an-

angulum SRG; sive ad partes parabolae AB. Et una determinans rectam quaesitam erit CI. scilicet circuli radius; altera erit CN ex C versus K. Quare sumatur tunc supra BA recta una BC ex B; versus A; est enim $NC + x$. sed sit ipsa BC maior radio. Etenim est NC. maior CI, seu radio; per descriptionem curvarum. Altera vero determinans quaesitam est ipsemet radius BQ, atqui ex eodem puncto N. una tantum recta aequalis radio inclinabitur intus quadrantem BQP. & una tantum intus quadrantem AQP. [*Lemm. II.*]. Igitur accepta BC. maior radio cadet extra circulum. Ita enim; si iungatur QN. & CN. & protrahantur ad peripheriam in M; erit sane una QM quaesita aequalis radio; scilicet idemmet radius; pertingens quidem ad circulum cavum: & altera quaesita radio quoque aequalis erit CM; pertingens ad circulum convexum. Id enim positum est. Et non nisi recta una ex N. prodiens posita erit intus quadrantem AQP. aequalis radio; quae est ipse radius. FIG. XIII. & VIII.

S C H O L I V M.

In nostra aequatione tres octavae partes quadrati ex $2a$ coëfficiente termini secundi, nempe $\frac{3aa}{2}$; dempto $\frac{3aa}{4}$ coëfficiente termini tertii constituunt quantitatem positivam. Itemque tres octavae partes quadrati ex $\frac{aac}{2}$. coëfficiente termini quarti; dempto $-\frac{3a^4cc - 3a^4dd}{16}$. producto, quod fit ex termino postremo ducto in coëfficientem termini tertii; faciunt sane quantitatem positivam. Igitur (*per algorith.*) indicium alteruttum nequaquam adest radicis fictitiae in aequatione inventa. Et; per constructionem, descriptionemque curvarum; sese illae necessario alicubi intersecabunt. Aliam nunc parabimus constructionem aequationis inventae, quae necessario radices quatuor producat aequa-

aequationis; quare femper cafus omnes conficiet problematis. Proinde illam commenti fumus.

PROPOSITIO VI.

ALIA CONSTRVCTIO.

ADinventa aequatio fuit $x^4 - 2ax^3 + \frac{3aaxx}{4} + \frac{aacx}{2} - \frac{aadd - aacc}{4} = 0$. atque; ubi primo in locum $aayy - aaxx$ fucceflerit illius aequalitas $x^4 - 2ax^3$; evadebat aequatio $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. Conftructur autem ea hac via.

FIG. XIV.

Sumatur $AI = \frac{a}{4}$. & diametro AIS parametro $= a$. defignata fit parabola RAO. verticem habens A. Per I. agatur IRV parallela ordinatis defcriptae parabolae. Fiat in IRV portio $CI = \frac{a}{2}$. atque $CQ = c$. Eft vero (*hypoth.*) c minor $\frac{a}{2}$. (*propofit. IV.*) deinde in eadem IRV. fit $DQ = d$. cique aequalis efficiatur QB. Eft etiam (*eadem hypoth. propofit. IV.*) ipfa d. minor $\frac{a}{2}$. fed maior quàm c. Nunc diametro fecunda BD. parametro vero $= \frac{BD}{4} = \frac{d}{2}$; ordinatifq; ad diametrum fecundam parallelis ipfi AIS comparata fit hyperboles GEH cum oppofita TFK. dico primo, ductas rectas ex interfectionibus curvarum parallelas diametro AIS. parabolae abfcindere fupra $BQDR$. lineas aequales petitae x. & problemati fatisfacientes. Et fecundo; quatuor neceffario effe interfectiones; inde quatuor habendas effe x. Quoniam curvae per defcriptionem fefe equidem interfecabunt; fint autem interfectionum puncta P. Vnde demittantur

PM

PM ad parabolam, & *PN* ad diametrum fecundam hyperbolis ordinatim adplicatae. Sunt quidem *CN*. ex *C* tendentes verſus *B* $+x$; atque *PN* ex interſectionibus tendentes ad *IRV*. funt $+y$. & in plagis contrariis erunt illae $-x$. & iſtae $-y$. uti in praecedentibus. Igitur $QN = QC - CN$; aut $= CN - CQ$; vel $= QC + CN$ erit $= c - x$. vel $= x - c$. Profecto deſcripta parabola *RAO* demonſtrata in ſuperioribus eſt locus eſſe parabolicus $ax - xx = ay$. Vnde erit $yy = \frac{x^4}{aa} - \frac{2x^3}{a} + xx$. atqui ob hyperbolam ad ſecundam diametrum habetur $PN^2 . QD^2 + QN^2 :: \frac{DB}{4} . DB :: \frac{1}{4} . 1$. Quare erit $yy . dd + xx - 2cx + cc . \frac{1}{4} . 1$. Et inde erit $yy = \frac{dd}{4} + \frac{xx}{4} - \frac{2cx}{4} + \frac{cc}{4}$. Sive $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. quae hyperboles erat conſtruenda. Inde loco yy in hac aequatione ſupponatur $\frac{x^4}{aa} - \frac{2x^3}{a} + xx$. Et effieietur $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{aacx}{2} - \frac{aadd}{4} - \frac{aacc}{4} = 0$. Quae aequatio fuit inventa; & quam conſtruere oportebat. Et pertranſibit hyperboles per verticem *A* parabolae. atq; ipſa parabola ducetur per punctum *C*. Vti ſupra (*propoſ. IV.*) de duabus parab.[lis] dictum eſt. Eodem enim modo hic ea oſtendentur. Sumantur nunc ſupra *BA* data circuli diametro tres *BC*. *BQ*. *BC*. ex *B*. verſus *A*. quarum *BQ*. eſt radius; aequales ordine; ſicuti in ſuperioribus; [*propoſit. IV.*] ipſis *CN*. *CI*. *CN*. & quarta *BC* ex *B*. ad plagam contrariam aequalis *CN*. locatae ex *B*. ad partem adverſus *A*. atque connectantur *CN*. *QN*. *CN*. *CN*. producanturque ad circuli circumferentiam in *M*. & erunt interceptae inter cavam circuli peripheriam, & diametrum *BA*. rectae tres *CM*. *QM*. *CM*. quarum *QM*. eſt radius; atque recta una *CM*. inter convexam peripheriam. & eandem dia- FIG. XIV. & VIII.

diametrum aequales ſingulae radio circuli dati. Id enim poſitum eſt. Et tertia BC ex B. verſus A accepta incidet extra circulum; ita enim una intus quadrantem BQP. aequalis radio; & una intus AQP. radio quoque aequalis; nempe ipſe radius QM. (*Lemm. II.*) erit locata.

Quod eſt primum.

FIG. XIV. Eſt diameter ſecunda BD. hyperbolis $= 2d$. atque illius parameter $= \frac{d}{2}$. ſed EF diameter prima eſt media Geometrica inter $2d$. & $\frac{d}{2}$. quare erit $EF = d$. Et $QE = \frac{d}{2}$. Agatur EL. parallela RIV occurrens AI in L. remanebit LA extra IL; & vertex A parabolae ſubinde manebit ſupra verticem E hyperbolis. Quae patent.

Inde neceſſario parabola, & duae hyperbolae ſemper in quatuor punctis mutuo convenient: & quatuor adſequemur radices aequationis. Quod erat ſecundum. Et indicium non adeſt radicum aequationis impoſſibilium [*per algorith.*] quod ſupra (*ſchol. propoſit. V.*) oſtenſum eſt.

PROPOSITIO VII.

FIG. XV. Sit nunc datum punctum N in circuli ADI circumferentia ita ut ordinata ex illo ducta NO ad diametrum poſitione datam BA. cadat in circuli centrum O. Et quaeratur intercepta CM. uti ſupra [*propoſit. I.*] aequalis datae P. Similis erit ſolutio. Nam ſit CM. quaeſita P. & ordinetur MP. dicaturque BC. ignota x. Erit $AC = a - x$; retentis iisdem denominationibus; quae in praecedentibus (*propoſit. I.*). & $OC = BO - BC$. erit $= \frac{a}{2} - x$. atque etiam erit $CN = \frac{ax - xx}{b}$. Sed eſt CN. NO :: CM. MP; ſcilicet $\frac{ax - xx}{b}$. $\frac{a}{2}$ :: b. $MP = \frac{abb}{2ax - 2xx}$.

Eſt.

Estque $NO . OC :: MP . PC$. quare erit $\frac{a}{2} . \frac{a}{2} - x ::$ $\frac{abb}{2ax - 2xx}$. $PC = \frac{abb - 2bbx}{2ax - 2xx}$. atqui est sane $MC^2 = MP^2 + OC^2$. quare erit $bb = \frac{aab^4 + aab^4 - 4ab^4x + 4b^4xx}{4aaxx - 8ax^3 + 4x^4}$. Et performetur aequatio; quae proveniet $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + abbx - \frac{aabb}{2} = 0$.

Construetur autem simili quoque ratione, ac praecedentes compositae fuerunt aequationes.

Adsumatur enim locus parabolicus $ax - xx = by$. Hinc erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = bbyy$. Quare si in sede $aaxx - 2ax^3 + x^4$ aequationis inventae reponatur eius aequalitas $bbyy$; extabit aequatio $yy - xx + ax - \frac{aa}{2} = 0$. Itaque sit $AI = \frac{aa}{4b}$. Et vertice A. diametro AIS. parametro b. describatur parabola KAO. Post hac per I. agatur BT. parallela ordinatis parabolae descriptae. in qua sit $BI = \frac{a}{2}$; seu radio; aut ordinatae NO (*Fig.* xv.); atque sit $IC = BI$. Et diametro secunda BC. describatur hyperboles aequilatera DEL; cum sua opposita GFH. Occurrent mutuo duae curvae; diametri enim illarum sese intersecant intus parabolam (*constru,ion.*). Et occurrent invicem aut in quatuor, aut in duobus punctis. ipsae duae curvae. Potest enim $AI = \frac{aa}{4b}$ esse maior, aut minor (*constru,ction.*) quàm sit $IE = \frac{a}{2}$ semidiameter coniugata hyperbolis. Et nequit esse illi aequalis; cum non sit data P. seu b. circuli radius. [*hypothes.*]. Hinc vertex A. cadere potest aut intra hyperbolem DEL. aut extra. Quod in antecedentibus pro aliis casibus etiam ostenditur (*prop. II.*)

FIG. XVI.

FIG. XVI. & XVII.

Non adeſt conditio non ſemel memorata (*propoſit. I.*) radicis fictitiae. Nam $\frac{3}{2}aa - aa + bb = \frac{1}{2}aa + bb$. quantitas eſt poſitiva. itemque quantitas poſitiva eſt $\frac{3}{8}aab^4 + \frac{a^4bb}{2} - \frac{aab4}{2}$; cum ſit ſola $\frac{a^4bb}{2} - \frac{aab4}{2}$ (*hypoth.*) quantitas poſitiva. Hinc nequaquam diſcordant, quae de iis radicibus in aequationibus quarti gradus demonſtrat algorithmus. atque tres in inventa aequatione ſunt radices verae; una falſa (*per eundem*). Ergo ſi quatuor ſint curvarum concurſus; tales radices aequationis erunt. Termini autem eiuſdem aequationis non ſunt omnes poſitivi: & non conſecutio invenitur ſignorum $+$; & $-$. habet enim tertius & quartus ſignum $+$. Igitur (*per algorith.*) radices aequationis erunt verae cum falſis commixtae. Inde ſi duae ſunt interſectiones curvarum; radix una vera erit, altera falſa.

Nunc ſint interſectionum puncta P. ex quibus punctis demittantur ordinatae PM. ad parabolam. atque ad diametrum ſecundam hyperbolis ordinatae PN. Sunt CN. ex C. verſus B. $+x$. & PN. ex P. verſus BCT. ſunt $+y$. Inde in locis oppoſitis fient illae $-x$. & iſtae $-y$. Atque CN. erunt radices aequationis inventae; valoreſque ignotae x. Nam Parabola quidem KAO. locus erit novus inductus parabolicus $ax - xx = by$. quod pluries antea demonſtratum eſt. atqui propter hyperbolem habetur

FIG. XVI. & XVII.

$PN^2 = BI^2 + NI^2 = BI^2 + \overline{CI - CN}^2$; ſive $= BI^2 + \overline{CN - CI}^2$ aut $= BI^2 + \overline{CI + CN}^2$. quare erit $yy = \frac{aa}{4} + xx - ax + \frac{aa}{4}$. Et inde efficietur $yy - xx + ax - \frac{aa}{2} = 0$. quae hyperboles erat aequilatera. Sed ſunt eaedem x. & eaedem y. in utroque loco. Igitur removeatur yy; & eius aequalitas (*per parabolam*) ſubiiciatur $\frac{aaxx}{bb} - \frac{2ax^3}{bb} + \frac{x^4}{bb}$. Et reſtitutam habebimus

com-

compertam aequationem $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + abbx - \frac{aabb}{2}$. quam construere oportebat.

Accipiantur nunc super diametro positione data *BA*. circuli dati *ADI*. cuius centrum *O*. tres *BC*. *BO*. *BC*. ex *B*. versus *A*. & quarta *BC* in oppositione; si quatuor sint curvarum intersectiones; si vero duae sint intersectiones; sumantur duae *BC*. una ex *B*. versus *A*. altera aversa ipsi *A*. eo plane ordine; quemadmodum constitutum supra fuit [*proposit. I. in constructione*]. Et iungantur *CN*. eruntque; protractis *NC*. ad peripheriam in *M*; comprehensae *CM*. inter diametrum datam *AB*. & ipsam peripheriam aequales singulae eidem rectae datae *P*. seu *b*. Id enim positum est. Atque ad circuli datam diametrum *BA*. ducatur alia diameter *QON*. ad normam in *O*. Et; si quatuor sint intersectiones duarum Curvarum; tunc trium rectarum *BC*. acceptarum ex *B*. ad plagam *A*. in ipsa *BA*. una incidet supra; & una infra *NOQ*. atque tertia extra circulum. Ita enim una *CM* tantum intus quadrantem circuli *BOQ*. includetur aequalis datae; & una eidem aequalis intus quadrantem *AOQ*. (*Lemm. II.*) Et quae *CM* intus circulum erunt; pertinebunt ad cavum illius; quae vero duae *CM*. extra circulum; pertinebunt ad convexum. sive quatuor sint, sive duae *BC*. & inde quatuor sint, sive duae *CM*.

FIG. XVIII. XVI. & XVII.

FIG. XVIII.

S C H O L I U M.

FIG. XVI. & XVII.

Nequaquam; uti monebatur; erit $AI = EI$. quare curvarum vertices convenire minime poterunt. Sed erit *AI* aut maior, aut minor *EI* (*ut in propositione*). Quoniam si *AI* foret $= EI$; esset $\frac{aa}{4b} = \frac{a}{2}$. Hinc $\frac{aa}{4} = \frac{ab}{2}$. & $\frac{a}{2} = b$. Quod impossibile; esset enim data *P*. aequalis radio circuli dati. Resistit autem hypothesis.

PROPOSITIO VIII.

FIG. XV. Sint eadem; quae antea. Sed quaeratur de recta P. intercepta inter diametrum circuli, & circumferentiam, quae obveniat aequalis radio circuli. Similis equidem erit solutio. Profecto nuper inventa aequatio evadet $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{a^3x}{4} - \frac{a^4}{8} = 0$. Haec ipsa aequatio non est in sua propria sede locata. Etenim postremus terminus $-\frac{a^4}{8}$, habet divisorem $+\frac{a}{2}$. qui metitur $-\frac{a^4}{8}$ per $-\frac{a^3}{4}$. Et ipsa aequatio plane dividitur per $x - \frac{a}{2} = 0$. & relinquitur $x^3 - \frac{3axx}{2} + \frac{a^3}{4} = 0$. quae inferiùs etiam deprimitur per $x - \frac{a}{2} = 0$. Et remanet $xx - ax - \frac{aa}{2} = 0$. In sua autem sede haec insidet aequatio; & radices habet duas; positivam unam; & alteram negativam; nempe $\mp \sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{aa}{2}$. Igitur inventa aequatio est primi gradus; sed cum provenerit quarti gradus; duas habet radices rationales positivas $+\frac{a}{2}$, unamquamque aequalem radio circuli dati; & duas irrationales, unam positivam; aliamque negativam. Et singulae fuerunt x. cuius illae exponunt valorem. talesque fuerunt radices per nuper effectam inventionem illarum. atque tales illas ostendit consecutio signorum $+$; aut $-$. iuxta algorithmum.

FIG. XVII. Itaque accipiatur supra diametro BA. Circuli dati; super qua fuerunt ignotae x; seu BC [*proposit. I.*] radius BO. Et iuncta est ON; nempe circuli radius; seu ordinata ex N. dato puncto supra

pra peripheria (*hypothesi*). Igitur producatur ON. ad circumferentiam in Q. deinde ex B. ad plagam contra A. fiat $BC = -\sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$. atque ex eodem B. in plaga versus A. fiat $BC = +\sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$. & cadet haec BC. infra centrum O. circuli; seu infra diametrum NOQ. & quidem extra Circulum; est enim $+\sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$ maior diametro Circuli: atq; iungantur C. & datum punctum N. eruntq; OQ. atque CM rectae quaesitae aequales radio. Id enim positum est. Et radices duae aequationis inventae aequales singulae ipsi $+\frac{a}{2}$. exponentur ab eadem BO. sunt enim cum eodem signo omnino aequales; aliaeque duae exponentur ab ipsis duabus determinatis BC. Atque OQ spectabit circulum cavum. Sed duae CM. proficiscentes ambae à punctis C. acceptis (*construct.*) extra circulum; & una quidem à C. ad plagam ex B. contrariam A. altera à C. ad plagam ex B. versus A; pertinebunt ad circulum convexum.

PROBLEMA X. GEOMETRICVM.

DE SOLIDO COCHLEARI.

L E M M A I.

QVantitas Differentialis iuxta Algebricam analysim infinitè minorum potest infinita habere Integralia; non enim differentiae minimae $\mp dx$ est sola Integralis quantitas $\mp x$; verum etiam $\mp x \mp m$. Et m quasvis cognitas indicat magnitudines; & numero etiam infinitas. Hinc inventa quantitas Integralis non semper satisfacit problemati; sed oportet ut quaedam data, & nota quan-

quantitas ipsi Integrali addatur; aut ab illa subducatur. Quod in dicta algebra infinitè parvorum, ut rectè animadvertatur, vulgo iussum semper fuit.

Exploratum aliquando est; quaenam sit quantitas addenda, aut demenda; aliquando minimè est. Si perspectum est; facilis erit actus; & inferiùs etiam id ostendetur exemplo parabolae. Si non est perspectum; eximius prae omnibus Geometra analystes Io. Bernoullius in fine Lectionis VIII. Mathematicae de methodo Integralium tomo operum III. modum agendi praebet exemplo firmatum; scilicet; spatium; cuius Integralis inventa est; poni aequale nihilo: & tunc; si Integralis quantitas quoque plane evanescit; nihil addendum esse, nihil auferendum ipsi Integrali; si vero quantitas aliqua adhuc restat positiva; esse illam ex aliis Integralibus subtrahendam; si autem negativa; esse iisdem addendam. Haec Bernoullius.

Verum aliquando spatii consideratio usui esse potest; praecipuè cum spatium aliquod constituit quaesitam summam Differentialis; nempe integrat; uti in hac doctrina dicitur; quantitatem Differentialem; cuius non accipitur, aut accipi nequit expositio algebrica Integralis; at aliquando ipsa spatii consideratio locum habere non potest; vel non est necessaria. Quapropter generatim; si minus innotescat; quae quantitas addenda sit Integrali; quaeve de illa detrahenda; fiat ignota abscissa; uti x; aequalis nihilo; & si nil reliquum sit; argumentum id erit, nil esse addendum, & auferendum Integrali; si autem relinquatur quicquam; est illud Integrali adiiciendum; si sit negativum; sed auferendum, si positivum. Demonstratur.

TAB. IX. PROBL. X. FIG. I. Quoniam sit semiparabola ABC, cuius diameter AH; quae sit axis facilitatis caussa. Et vertex sit A. parameter AL. sit in AH. portio data AD. ad quam ordinata parabolae sit DP. quae erit data. Originem abscissae non habeant quidem in A. sed in D. Et sint ex D versus $H = + x$. Ordinatae autem tendentes ex AH axi versus crus AC. parabolae sint $+ y$. Dicantur datae $AD . b$. & $DP . a$. atque data etiam AB sit $= c$. Et BC basis semiparaboale

bolae datae ſit $= m$. tandem perameter dicatur p. Erit aequatio curvae $yy = bp + px$. cùm ſit abſciſſa parabolae $= b + x$. Sumantur nunc infra PD in parabola duae infinitè proximae NM. nm. atque ex N. agatur NO parallela AH. occurrens nm in O. Eſt quidem $AM = b + x$. Sed differentia eius minima Mm eſt dx. eadem plane, ac ſi abſciſſae forent ſimplices x. cum origine in A.

Elementum areae ſemiparabolae eſt minimum trapetium $nNMmn = y \cdot dx$. atqui eſt $2y \cdot dy = p \cdot dx$. Vnde $dx = \frac{2y}{p} dy$. quare Elementum erit $\frac{2yy}{p} \cdot dy$. Cuius Integrale eſt $\frac{2y^3}{3p} = \frac{\overline{2bp + 2px}}{3p} \times \sqrt{pb + px}$. Sed eſt in B ipſa abſciſſa $b + x = AB = c$. Et ordinata y: ſit $= BC = m$. Quare Integrale $\frac{\overline{2bp + 2px}}{3p} \times \sqrt{pb + px}$ erit in $B = \frac{2pc}{3p} \sqrt{cp} =$ (*ob parabolam*) $\frac{2}{3} cm$. quae tota area eſt ſemiparabolica ABC. Verùm ſi accipiantur in eadem parabola duae infinitè proxime NM. nm. ſupra PD. & eadem ibi fiant; erit ſpatium ſemiparabolicum ADP. eadem argumentatione; cum locus parabolicus $yy = bp + px$. ubique inſidat in curva; aequale $\frac{2}{3} ab$. Ergo habebitur & totum ſpatium ſemiparabolicum ACB; & pars eius à vertice ſumpta ADP. & tandem etiam ſegmentum illius $DBCP$. Etenim eſt illud $\frac{2}{3} cm - \frac{2}{3} ab$. Si nempe $\frac{2}{3} ab$. detrahatur ex $\frac{2}{3} cm$.

Haec ita ſane eveniunt; quoniam exploratum eſt; quae ſit origo abſciſſarum: & deſcripta exiſtit Figura: & reliqua patent; & data ſunt. Sit vero propoſita ſola Integralis quantitas $\frac{2bp + 2px}{3p} \times \sqrt{pb + px}$; & aliud quippiam non detur; idcircoque non innoteſcat abſciſſarum origo; & reliqua ſint inexplorata; oportet perquirere (*per dicta*) quid addendum, auferendumve

In-

Integrali sit; ut satisfiat quaestioni. Igitur efficienda est abscissa $x = 0$. Etenim est x (*hypoth.*) abscissa; atque spectandum, num aliquid restat. Quod si reliquum est aliquid; debet illud deduci ex Integrali inventa, si est positivum; aut addi eidem Integrali; si negativum: sive; quod unum idemque est; debet illud semper detrahi ex Integrali inventa. Etenim additio quantitatis negativae constituit apotomem in Arithmeticis, & Algebricis; nimirum recisionem. Et id efficiendum est; ut satisfiat Quaestioni.

Quoniam profecto ignoratur (*hypothesi*) origo abscissarum; & ignorantur, quae per Integralem inventa sunt; atqui datae Differentialis dx. est Integralis tam sola x. quàm $x \mp m$. Ergo; ut satisfiat quaestioni; cum reliqua non dentur; & non sint cognita, atque inde non pernoscatur, de qua re agitur (*hypoth.*); efficienda est x; terminique ubi adsunt x. efficiendi nihilum; sive $= 0$. Et si nil restat; est Integralis sola x. si vero aliquid remanet ex causs. $+m$. sive $-m$. non est Integralis sola x. sed accipienda est Integralis $x - m$. aut unus, aut alter sit casus; sive ipsius $+m$; sive ipsius $-m$. uti explicatum est. Ergo semper; si aliquid restat; indicium id est quaeri, quod continet Integralis x. dempta cognita alia magnitudine. Sicuti in negocio nostrae parabolae; si in Integrali $\frac{2b+2x}{3}\sqrt{pd+px}$ fiant termini; ubi x; aequales nihilo; restat $+\frac{2}{3}x\sqrt{px}$. quod detrahendum est ex $\frac{2d+2x}{3}\sqrt{pb+px}$. Quare indefinita Integralis quaesita erit $\frac{2b+2x}{3}\sqrt{pb+px} - \frac{2}{3}x\sqrt{px}$. Et determinata Integralis in B. erit $\frac{2}{3}cm - \frac{2}{3}ab$; sicuti nuper supra inventum id fuit. Hoc autem quaeritur, quod haec continet Integralis; quae satisfacit inde quaestioni; cum non patescat origo abscissarum; & reliqua non sint data, sed ignorentur. Igitur quaeritur

solum

solum segmentum semiparabolicum $DBCP$. quod est $= \frac{2cm}{3} - \frac{2ab}{3}$.

COROLLARIUM.

I. Hinc; etiamsi data, & cognita sit Figura; de qua agitur; & reliqua etiam perspecta; sed sola origo abscissarum (quae abscissae in his ponuntur semper adpellatae x.) varia sit, & minimè data; tamen efficienda quoque est $x = 0$. & è medio Integralis indeterminatae tollendi sunt termini, ubi adest x. Nam tunc [*ex dictis*] semper, an differentiae minimae dx. sit Integralis sola x. num verò x. sed addita, aut detracta alia cognita magnitudine; anceps. Ergo per propositionem patet, quod dicitur.

II. Colligitur etiam, poni posse ignotam x. aequalem nihilo non solùm in Integrali quantitate indeterminata; sicuti explicatum est; verùm etiam in ipsa Differentiali: & inde tollendos esse ex illa terminos; in quibus inest sola differentia minima dx. Idem enim est quaerere, an accepta Integralis x. sit sola Integralis differentiae minimae dx. utrum vero aliarum datarum magnitudinum additarum ipsi x; vel ex illa deductarum; ac quaerere, an Differentialis dx; priusquam accipiatur eius Integralis; habeat solam Integralem x. num vero x. & alias magnitudines sibi additas, aut è se ipsa detractas. Id autem efficitur (*per tradita in proposit.*) cum sit $x = 0$.

III. Quae continet propositio ita se habent; quoniam in Elementum quodvis quaesitae cuiusvis dimensionis; aut confectao alterius cuiuscumque quaestionis per Algebram infinitè minimorum init semper differentia minima dx. cuius Integralis quantitas esse potest tum sola x; cum $x \mp m$. Inde enim haec omnia pendent. Et exploratum id est per ea, quae dicta sunt. Ergo; cum solum ob id fiat $x = 0$; aut $dx = 0$. (*n.* 2.); amovendi ex Integrali; aut Differentiali (*n.* 2.) soli termini sunt, ubi comperitur x; non quidem x. ad alias potestates evecta; qualis x^2. aut

x^3. & x^4. Et ita de reliquis; atque ubi comperitur [*n.* 2.] sola differentia minima dx. non vero ducta in x. aut in alias potestates ipsius x. qualis x. dx, vel $x^2 . dx$. Sive $x^3 . dx$. Et ita de ceteris. idcirco diximus [*n.* 2.] tollendos esse è Differentiali terminos; ubi adest sola dx.

LEMMA II.

FIG. II. Sit datum triangulum FAD orthogonium in A. oportet illud in duo aequalia dividere per rectam BC parallelam lateri FA. quod angulo insistit recto A.

Dividatur ita in B. ex D. datum latus AD; unde ducenda est recta BC quaesita; ut sit DB. media Geometrica L. inter dimidiam rectam lineam AD; atque totam eandem AD. Agatur ex B. parallela BC ipsi FA. occurrens FD. in C, Et erit datum triangulum FAD. dispertitum in trapetium $FABCF$; & triangulum CBD. invicem aequalia à recta BC parallela lateri FA.

Etenim; cum sit $DB . BC :: DA . AF$; & triangulum CBD. sit aequale $\frac{CB \times BD}{2}$; erit ipsum idem triang. CBD. aequale (*per fabricam*) quartae parti rectanguli $FA \times AD$. cuius rectanguli dimidio est aequale totum triangulum FAD. Igitur quod restat trapetium $FCBA$; si a triangulo toto FAD. tollatur triangulum CBD; erit altera quarta pars rectanguli FA in AD. & inde aequale triangulo CBD. Ergo erit datum triangulum FAD. dispertitum in duo aequalia; videlicet in trapetium $FCBA$. & in triangulum CBD. à recta BC parallela lateri FA. *Q. E. F.*

DEFINITIO.

FIG. III. Sit Rectangulum $ABDC$. cuius lateri CD. adhaereat Figura quaevis plena EDF. Existentes ambae Figurae in eodem semper plano revolvantur motu aequabili, & tempore eodem circa fixum axim AB. Interea Figura EDF moveatur altero motu pro-

progressivo supra latus *CD*. in dicta revolutione; donec conversio tota perficiatur illuc desinens; unde coepta est; Solidum genitum *Cochlea* adpellatur.

S C H O L I V M.

Solidi Cochlearis hanc maximè perspicuam, optimamque definitionem excogitavit Torricellius scripto relictam in Commentariolo quodam de Cochlea; ubi nonnulla, satis vero bene pauca, atq; ea strictim quidem, ac presse de hoc solido commentus est. Et non semper demonstrationem subiungere voluit. Centrum vero gravitatis illius vix in fine, & unius tantùm generis Cochlidis; scilicet enatae à triangulo adhaerente lateri Figurae revolutae sine ulla demonstratione commemorat. Nos ipsam eandem definitionem solam cetera omnia nostra facientes recepimus. Et Torricellius Geometria infinitè minimorum certo non usus fuit. Dictus Commentariolus operibus evulgatis Torricellii ad finem adiectus est. Vir magnae existimationis Paschalius in quibusdam in lucem emissis Epistolis Mathematicis ad varios scriptis nomine subdititio Dettonvillii; ut mihi narratum est; litteris etiam prodidit de Cochlea in Epistola ad Sluzium; sed quàm brevissime scripsit; solasque paucas propositiones protulit sine demonstrationibus; quas aut praetermittit; aut ex alio Commentario a se composito de Arcubus Circulorum, cumque Epistolis illis in lucem edito consectari illas enunciat. Neque Dettonvillius Geometriam infinitè minimorum ad sua demonstranda adhibuit. Et egregia definitio Cochleae Torricelliana multo anteferenda est definitioni Dettonvillii. Geometras alios de Cochlea agentes nos non vidimus: & etiam ignoramus.

P R O P O S I T I O I.

Sit rectangulum *ABDC*. & Figura alia Plana adhaerens lateri *CD*. sit triangulum *EDF*. orthogonium in *D*. cuius quidem FIG. IV.

N 2 latus

latus ED. sit in CD. atque revolvantur ambae Figurae circa latus fixum AB; proreparque triangulum EDF. eodem tempore motu suo proprio supra CD. donec tota perficiatur conversio. (*defi-nit.*) Quaeritur Cochlea per revolutionem generata.

Agantur ordinatae communes rectanguli, & trianguli duae MON. mon. infinitè proximae, & parallelae quidem ipsi BDF. Itaq; erit MO. ordinata rectanguli; & ON trianguli. Dicantur datae BDF. r. BD. b. ED. p. DF. a. Sed denominentur ignotae, & mutabiles EO. x. atque MON. y. Erit Oo. differentia minima dx. Sit Elementum solidi minimus cylinder $MmnN$. ac si in revolutione triangulum EDF. non ferretur motu suo progressionis supra CD. atq; si dicatur c. peripheria descripta in revolutione à dato radio BDF sive r; erit peripheria descripta in eadem conversione à radio vario MN. aequalis $\frac{cy}{r}$: & circulus basis cylindruli erit aequalis $\frac{cyy}{2r}$. Est vero $Oo = dx$. altitudo eiusdem minimi cylindri. Ergo erit Elementum $MmnN = \frac{cyy.dx}{2r}$.

Sed est $ED. DF :: EO. ON$. nempe $p. a :: x. y - b$. Vnde erit $ax = py - pb$. & $y = \frac{ax + pb}{p}$. atque $yy = \frac{aaxx + 2pbax + ppbb}{pp}$. Igitur si in Elemento loco yy sufficiatur hic eius valor; erit illud $= \frac{caaxx.dx}{2rpp} + \frac{capbxx.dx}{rpp} + \frac{cbb.dx}{2r}$. Et summa, seu Integrale erit $\frac{caax^3}{6rpp} + \frac{capbxx}{2rpp} + \frac{cbbx}{2r}$. atqui ob motum progressivum Figurae EDF supra latus CD. Origo abscissarum x. in E. non quidem data est; sed varia est, & mutabilis. Ergo (*corollar. Lemm. I. n.* I. *&* III.) efficiatur $x = 0$; & ex Integrali invento tollatur terminus $\frac{cbbx}{2r}$.

Et

Et erit illud $\frac{caax^3}{6rpp} + \frac{cabxx}{2rp}$. Sed fit in D. ignota x. aequalis p. quare quaesitum solidum erit $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$,

Sit hyperboles AE, cuius latus rectum $BD = \frac{2ba}{p}$. Et sumantur quidem eaedem rectae lineae; quae in Cochlea; eodemque modo denominatae. Latus vero transversum, seu axis CA. sit $= \frac{2bp}{a}$. Item sit AF in axi producto intus curvam $= p = ED$. Figurae Cochleae. Ex F ordinetur FE. ad curvam. Atque ductae sint in hyperbole infinitè proximae ordinatae MN. mn. sunt quidem abscissae AN. x. & ordinatae MN. y. Tandem agatur MO. parallela AF secans mn. in O. Nunc revoluta curva AEF. circa fixam AF. generet conoidem hyperbolicam EAH. Cuius altitudo AF. Itaque Elementum dictae Conoidis erit minimus Cylinder $MOnN = \frac{cyy \cdot bx}{2r}$. Ostenditur uti hic superiùs in Cochlea descripta. Sed ob hyperbolem est $yy. \frac{2bpx + axx}{a} :: \frac{2ba}{p}. \frac{2bp}{a} :: aa. pp$. Quare erit $yy = \frac{2abpx + aaxx.}{pp}$ Substituatur in Elemento vice yy. haec illius aequalitas. Et erit illud $= \frac{cabpx \cdot dx}{rpp} + \frac{caaxx \cdot dx}{2rpp}$. Et Integrale indefinitum erit $\frac{cabxx}{2rp} + \frac{caax^3}{6rpp}$. atq; determinatum fiet $= \frac{cabp}{2r} + \frac{caap}{6r}$; cum x. fiat in F. aequalis p. quod idem plane solidum est, ac Cochlea inventa. Igitur erit ipsa Cochlea aequalis Conoidi hyperbolicae; cuius altitudo ED. latus rectum quarta Geometrica ad DF. DE. & duplam BD. latus vero transversum quarta Geometrica ad DE. DF. & duplam pariter BD.

FIG. V. FIG. IV. & V. FIG. IV.

CO-

COROLLARIVM.

FIG. IV. Idem proveniet si triangulum orthogonium EDF. fuerit Isosceles. Quoniam erit tunc $p = a$. Et Cochlea fiet $\frac{ca^3}{6r}$ +

FIG. V. $\frac{cbaa}{2r}$. Igitur latus transversum CA hyperbolis fit $2b$. Et hyperboles ipsa fit aequilatera. Itaque erit $yy = 2bx + xx$. atque Elementum Conoidis hyperbolicae habebitur $\frac{cbx.dx}{r} + \frac{cxx.dx}{2r}$. Cuius summa erit $\frac{cbxx}{2r} + \frac{cx^3}{6r} = \frac{cbaa}{2r} + \frac{ca^3}{6r}$ in puncto F. Quae Cochlea fuit inventa.

PROPOSITIO II.

FIG. VI. Sint omnia quae antea. Sed Figura Genitrix $CABFE$. non sit orthogonia in D. Quare in revolutione generet Cochleam scalenam. Igitur sit angulus EDF acutus. Et Figura $ABDC$. parallelogrammum sit non rectangulum; triangulumque EDF acutiangulum in D. Retineantur eaedem denominationes linearum; quae in praecedenti. Et sit quoque EO. abscissa x. atque $MN.y$. uti in antecedenti. Ducatur ex E normalis EI supra DF. & cadat EI. aut intra, aut extra DF. ad partes F. scilicet; aut sit angulus EFD. acutus, aut obtusus; idem eveniet. cadat intra DF. ipsa EI. quae dicatur m. Agatur OP. parallela EI. secans mn in P. Est sane $DE.EI :: oO.OP$, quare erit $p\ m :: dx.\ \frac{mdx}{p}$.

Erit igitur Elementum Cochleae $cyy.\ \frac{mdx}{p}$. Sed est etiam $ED.DF :: EO.ON$. Et reliqua sicuti in antecedenti, Ergo Integrale erit $\frac{mcaax^3}{6rppp} + \frac{mcabxx}{2rpp} + \frac{mcbbx}{2rp}$. Sed ob motum progres-

greſſivum Figurae *EDE*. eſſe debet $x = 0$. (*coroll. Lemm. I. n.* 1. *&* III.) Quare indeterminatum Integrale erit $\frac{mcaax^3}{6rppp} + \frac{mcabxx}{2rpp}$. Quod in *D*. fiet determinatum $\frac{mcaa}{6r} + \frac{mcab}{2r}$.

Sit hyperboles *EAH* eadem, quae in praecedenti; cuius tamen diameter non quidem axis ſit *CA*. Et producatur *CA* ad *F*. intus curvam. ita ut ſit $AF = ED = p$. In recta linea *AF*. ad datum in illa punctum *F*. ſit angulus *AFH*. aequalis angulo *EDF*. Figurae *EDF*. genitae Cochleae. Ex *A*. ducatur *AI*. ad normam ſupra *FH*. erit triangulum *AFI*. aequale triangulo *DEI*. atque erit *AI*. aequalis *EI*. $= m$. Igitur ducantur infinitè proximae ordinatae hyperbolis *MN*. *mn*. ad diametrum *CAF*. atque ex *N* parallela fiat *NP*. ipſi *AI*. occurrens *mo*. in *P*. Erit ob ſimilia triangula *FAI*. *nNP*. ipſa $NP = \frac{mdx}{p}$. Et Elementum Conoidis hyperbolicae prognatae ex revolutione hyperbolis *EAF*. circa fixam *AF* (eſt quidem *FE*. ordinata ex *F*. hyperbolis) erit $= \frac{cyy}{2r} \cdot \frac{mdx}{p}$. Sed eſt ob hyperbolem; ſicuti in antecedenti; $yy = \frac{2abpx + aaxx}{pp}$. quare Elementum; facta ſubſtitutione pro *yy*; erit $\frac{2cabpx}{2xpp} \cdot \frac{mdx}{p} + \frac{caaxx}{2rpp} \cdot \frac{mdx}{p}$. Et varium Integrale erit $\frac{cabmxx}{2rpp} + \frac{caamx^3}{6rppp}$. quod in *F*. determinabitur $= \frac{cabm}{2r} + \frac{caam}{6r}$. Id autem fuit Cochleae ſolidum inventum. Igitur Conoidi huic hyperbolicae aequalis eſt Cochlis illa deſcripta ſcalena.

FIG. VII. & VI.

COROLLARIUM.

Perſpicuum eſt, eadem obvenire, ſi angulus *EDF*. fuerit obtuſus. FIG. VI.

FIG. VI. tufus. Item fi triangulum EDF. fuerit Ifofceles; aut etiam aequilaterum. Si enim fuerit Ifofceles; fcilicet fuerit $ED = DF$ fiet $p = a$. Et Cochlea eadem generabitur $\frac{mcaa}{6r} + \frac{mcab}{2r}$.

FIG. VII. in revolutione. Et hyperboles fit eadem fed aequilatera. Nam erit tunc $yy = 2bx + xx$. (*Corollar. praecedentis*) Atque Elementum efficietur $\frac{cbx}{r} \cdot \frac{mdx}{p} + \frac{cxx}{2r} \cdot \frac{mdx}{p}$. Inde Integrale erit $\frac{mcbxx}{2rp} + \frac{mcx^3}{6rp}$. Quod in F fiet $= \frac{mcbp}{2r} + \frac{mcpp}{6r}$.

Sed eft $p = a$. Quare integrale erit $\frac{mcba}{2r} + \frac{mcaa}{6r}$. Quae

FIG. VI. Cochlea eft hoc cafu prognata per converfionem Figurae $CABFE$. circa latus manens AB; & progreffionem trianguli Ifofcelis EDF. eodem tempore elati fupra CD. Idem plane erit fi EDF. fit triang. aequilaterum.

PROPOSITIO III.

FIG. VIII. CONvertatur Figura $CABFE$ circa latus manens AB. donec redeat unde coepit moveri; intereaque triangulum EDF. progrediatur fupra cui lateri CD rectanguli $ABDC$. advinctum eft. Ponatur divifum triangulum EDF in duo aequalia per rectam GO parallelam ex latere trianguli DF ductam alteri lateri ED (*Lemm. II.*) Quaeritur Cochlea defcripta à fola Figura $CABGO$. in revolutione.

Ducatur in triangulo FGO ordinata MN. parallela CD. five GO. & alia infinitè proxima ordinata mn. atque ex punctis N. n. fint duae NP. np, parallelae BF; occurrentes AB in P. p. fit etiam OL. parallela BF. occurrens AB. in L. Inveniatur (*propofit. I*) Cochlea; quae ex totius Figurae integra revolutione perata generatur: eritque; retentis pro quantitatibus in hac Figura datis denominationibus quantitatum fimilium ipfius propofitionis primae; folidum Cochleae aequale $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$. Nunc; difper-

dispertito (*hypothesi*) triangulo FGQ. ab ipsa GO parallela ED. in duo aequalia; erit data quidem, & cognita FG [*Lemm. II.*] sumatur quanta esse debet (*Lemm. eodem*); atque dicatur n. Sint datae quoque $GO = m$. Et $BG = b$. atque $BF = q$. Sint autem $FM = x$. Et $MN = y$. eritque differentia minima $Mm = dx$. Item circumferentia circuli descripti in revolutione à dato radio BG. dicatur f. Erit sane superficies Cylindri $LBGO$ designata in eadem revolutione à recta GO aequalis fm.

Iam vero frustum solidi generatum à triangulo FGO. in revolutione componitur ex infinitis annulis Cylindricis; qui constant ex descriptis à circumactis rectis lineis MN. in revolutione superficiebus ductis in altitudines Mm. usque ad terminum GO. Sunt vero superficies eae cylindrorum $MBPN$. quorum altitudines MN. & radii basium sunt $MB = q - x$. sed inventa superficies cylindrica fm. est ad dictam superficiem cylindricam descriptam à recta linea MN. in ratione composita ex ratione GO ad MN. & GB ad MB. nempe uti mb. ad $qy - yx$. Ergo superficies cylindrica descripta ab ordinata circumacta MN. erit $= \frac{fqy - fyx}{b}$. atqui est $FM.\ MN$ :: FIG. VIII.

$FG.\ GO$ :: $FD.\ DE$. Inde $x.\ y$ :: $a.\ p$. quare erit $y = \frac{px}{a}$. Sunt vero datae, & constantes ipsae $f.\ q.\ b$. Itaque praedicta superficies erit $= \frac{fqpx}{ab} - \frac{fpxx}{ab}$. Et minimus annulus cylindricus erit $\frac{fqpx.\ dx}{ab} - \frac{fpxx.\ dx}{ab}$. cuius mutabile Integrale $\frac{fqpxx}{2ab} - \frac{fpx^3}{3ab}$; quod in termino GO. fiet constans $\frac{fqpnn}{2ab} - \frac{fpn^3}{3ab} = \frac{3fqpnn - 2fpn^3}{6ab}$. Est vero $3q$. multo maior quàm $2n$. Vnde quantitas positiva est $3qn - 2nn$. & sit aequalis gg. Igitur annulus cylindricus habebitur $\frac{fpggn}{6ab}$. sed Cochlea descripta

O à tota

à tota Figura $CABFE$; eſt aequalis $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$ (*prop. I*) Inde Cochleae ſolidum deſcriptum à ſola Figura $CABGOE$ in revolutione erit $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r} - \frac{fpggn}{6ab}$ Quod fragmen erit Cochleae totius. Et ſcilicet patet, eſſe totam Cochleam $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$ maiorem eius parte; nempe annulo cylindrico $\frac{fpggn}{6ab}$. Atque motus progreſſionis ipſius Figurae $EDGO$ delatae ſupra CD. ratio quidem habebitur; accipitur enim tota Cochlea generata $CABFE$.

FIG. IX. Sit igitur hyperboles EAF. determinata in propoſitione prima; quae converſa circa manentem rectam AF. generat ſolidum hyperbolicum aequale Cochleae $\frac{caad}{6r} + \frac{cabp}{2r}$. Et eſt AF (*Fig.* IX & VIII.) $= ED = p$. tam in ipſa prima; quàm in hac propoſitione. Eſtque AFE angulus rectus. Nunc accipiatur in ordinata FE. portio $FI = \frac{\sqrt{ggn}}{a}$. Iungatur AI. Profecto in revolutione hyperbolis EAF. circa rectam AF. triangulum ſimul revolutum IAF. generat conum cum baſi; cuius circumferentia eſt $\frac{f\sqrt{\frac{ggn}{a}}}{b}$. Et ipſa baſis eſt $\frac{fggn}{2ab}$. atque conus eſt $\frac{fpggn}{6ab}$. Ergo

FIG VIII. & IX. quaeſita Cochlea deſcripta à Figura $CABGOE$ erit aequalis ſolido hyperbolico excavato $APEIA$. Eſt enim hoc ſolidum

$$= \frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r} - \frac{fpggn}{6ab}$$ *Q. F. O.*

S C H O L I U M.

Eſt ordinata hyperbolis $FE = \sqrt{2ab + aa}$ (*propoſit. pri-*

FIG. IX. *ma*) Hinc ſi obveniat $\frac{\sqrt{ggn}}{a}$ aequalis $\sqrt{2ab + aa}$, punctum I.

in-

incidet in E. Iungatur recta AE: atque; si revoluta sit Figura EAF. circa AF. erit Cochlea aequalis hyperboli excavatae $APEA$.

Manifestum, est idem esse huius propositionis problema cum illo; quo Cochlea quaeratur, quae gignitur à dato rectangulo $ABDC$, revoluto una cum adnexo trapetio $DEOG$. circa fixum latus AB. intereà dum promotum trapetium sit tempore eodem motu suo proprio super latus alterum DC. FIG. VIII.

PROPOSITIO IV.

Sint omnia, quae in Propositione I. & eadem Figura Quarta. Quaeritur genitae Cochleae centrum gravitatis.

Liquet sane, à Plano perducto per axim AB solidi; qui axis est fixum latus; circa quod tota Figura revolvitur; donec redeat; unde coepit moveri; dividi Cochleam in duo aequalia; atque id ipsum Planum dispertiri in duo quoque aequalia ab axi AB. [*per generationem solidi*]. Igitur centrum gravitatis manebit in recta AB. Et suspensio solidi poni debet effecta per filum AB. pertransiens per centrum. Sit effecta per AB. ex puncto A. Nunc ducatur EI parallela EDF. occurrens AB. in I. Datur CE. dari enim debet Figurae EDF; quaecumque ea sit; in tota Figura $CABDFE$. positus supra latus CD; ex quo positu moveri duplici motu incipiat ipsa EDF. & communi conversionis circa AB. cum rectangulo $ACDB$. & proprio; quo praeterlabitur supra CD. Inde data erit $CE = AI$. quae sit $= q$.

Erit (*eadem proposit. I.*) habita ratione dicti motus proprii trianguli EDF. progredientis supra CD. elementum solidi; & inde minimum illius pondus aequale $\frac{cauxx.\,dx}{2rpp} + \frac{cupbx.\,dx}{rpp}$. [*Corollar. Lemmatis I. n. 2.*] cuius Integrale indefinitum est $= \frac{caax^3}{6rpp} + \frac{capbxx}{2rpp} = \frac{caax^3 + 3capbxx}{6rpp}$. Sed est $CO =$

 AM

$AM = q + x$. atque est eadem AM. distantia semper minimorum ponderum solidi connitentium in suspensionem A. & quidem varia. Ergo productum ex $q + x$ in dictum minimum pondus erit aequale elemento momentorum ponderum eorumdem minimorum. Est vero id productum $= \frac{caaqxx.dx}{2rpp} + \frac{caax^3.dx}{2rpp} + \frac{capbqx.dx}{rpp} + \frac{capbx^2.dx}{rpp}$. Cuius indefinitum Integrale est $= \frac{caaqx^3}{6rpp} + \frac{caax^4}{8rpp} + \frac{capbqxx}{2rpp} + \frac{capbx^3}{3rpp} =$

$$\frac{48caaqx^3 + 36caax^4 + 144capbqxx + 96capbx^3}{288rpp}.$$

Dividatur nunc Integrale hoc per summam indefinitam ponderum simplicium $\frac{caax^3 + 3capbxx}{6rpp}$. Et adsequemur centri Gravitatis distantiam variam à suspensione A. Itaque erit ea distantia $= \frac{48aqx + 36axx + 144pbq + 96pbx}{48ax + 144pb}$. Sed $x = EO = IM$. efficitur in D. seu B. aequalis p. Ergo definita distantia, & quaesita centri Gravitatis Cochleae à suspensione

FIG. IV. A. super AB erit $= q + \frac{36ap + 96pb}{48a + 144b} = q + \frac{3ap + 8pb}{4a + 12b}$. quare erit aequalis AI. una cum quarta Geometrica post $4a + 12b$; & $3a + 8b$; & p. Est vero haec quarta Geometrica minor quàm p; seu quàm ED. sive IB. Igitur cadet centrum Gravitatis intra IB. Q. E. I.

PROPOSITIO V.

FIG X. Sint omnia, quae in praecedentibus. Sed sit rectangulum $EDFG$. quod adiaceat lateri CD & in revolutione motu proprio elatum sit supra ipsum CD. Quaeritur Cochlea; quae generatur.

Agantur infinitè proximae MON. mon. parallelae BDF. occu-

currentes AB. in $M.m$, Et CD. in $O.o$. Et GF in $N.n$. dicantur $BD.b$. & $BDF.r$. atque $ED.p$. Sit vero $DF.a$. atque $EO.x$. & $ON.y$. Erit $Oo.dx$. Sed est semper $MN = b + y$. Igitur Elementum solidi iuxta superiora erit $\frac{cbb + 2cby + cyy \times dx.}{2r}$ Amovendus autem est terminus $\frac{cbb.dx}{2r}$. propter progressionem Figurae $EDFG$. supra latus CD. procedentis; unde varia, & mutabilis est origo E abscissarum EO. (*Coroll. Lemm. I. n.* 2.) Ergo Elementum erit $\frac{2cby.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r}$

Atqui y est semper a. Et inde elementum erit $\frac{cba.dx}{r} + \frac{caa.dx.}{2r}$

Cuius summa $\frac{cbax}{r} + \frac{caax}{2r}$. Sed in D. efficitur x. aequalis p. Igitur quaesita Cochlea, & definita erit $\frac{2cbap + caap}{2r}$.

Et inde erit aequalis Cylindro; cuius altitudo p. scilicet ED. radius vero basis erit $\sqrt{2ba + aa}$. quae est media inter a; seu DF. & $a + 2b$. sive $FB + BD$. *Q. E. I.*

PROPOSITIO VI.

Sint eadem. Et eadem Figura: Quaeritur centrum Gravitatis. Repetantur quae in propositione IV. initio dicta sunt pro centro Gravitatis Cochleae illius. Deinde erat indefinitum Integrale Elementi, seu minimi ponderis solidi [*proposit. praeced*] $= \frac{2cbax + caax}{2r}$. Producatur GE. donec secet AB. in I. Et sit $CE = AI = q$.

Cum sit $CE = AI = q$; inde erit $AM = q + x$. & suspensio sit (*hypothesi*) in puncto A. Ergo Elementum momentorum ponderum solidi minimorum adversus A. connitentium erit; cum sit $q + x$ distantia, qua semper distant ea minima pondera à suspensione; aequale $\frac{cbaq.dx}{r} + \frac{cbax.dx}{r} + \frac{caaq.dx}{2r} +$

$caax.$

$\frac{caax.dx}{2r}$. cuius mutabile Integrale est $\frac{cbaqx}{r} + \frac{cbaxx}{4r} + \frac{caaqx}{2r} + \frac{caaxx}{4r} = \frac{32cbaqx + 8cbaxx + 16caaqx + 8caaxx}{32r}$.

Dividatur hoc Integrale per ponderum simplicium summam variam $\frac{2cbax + caax}{2r}$. Et; cum x fiat in B. aequalis p. habebitur distantia constans, & definita centri Gravitatis à puncto A. aequalis $\frac{32bq + 8bp + 16aq + 8ap}{32b + 16a} = q + \frac{bp + ap}{4b + 2a}$. Hinc erit illa aequalis ipsi q. sive AI. una cum quarta Geometrica post $4b + 2a$; & $b + a$, & p. quae quarta erit quidem minor p. Et inde manebit centrum intus IB. Q. E. I.

PROPOSITIO VII.

FIG. XI. Sit rectangulum $RTFE$; cuius latus TF. in C. & latus EF. in H. tangat circulus GLH. Sit circuli centrum S. Et iuncta HS. producatur ad circulum in G. atque in G. tangat quoque eundem circulum recta ABG. occurrens rectangulo in B. & A. Iungatur CS. quae producatur; donec secet rectangulum in D. Et revolvatur tota Figura circa latus manens RE; interea circulus eodem tempore motu proprio progreditur supra latus TF. quaeritur Cochlis hac revolutione procreata.

Ducantur infinitè proximae duae MPQ. mpq. parallelae RT. & secantes RE in M. m. atque TF. in P. p. & ipsum circulum hinc, & hinc à diametro GH. in O. o. atq; in Q. q. Ponatur G. origo abscissarum. Profectò in hac revolutione origo ipsa G. abscissarum constans est; & immutabilis; cum non adhaereat lateri TF. supra illud insidens; dum circulus duplici motu sursum defertur; & cum circulus area sua sursum non progrediatur per

ean-

eandem rectam TF; supra quam maneat. Igitur; dum Cochlea haec quaeritur; sola ratio ducenda est motus revolutionis circuli $CGLH$, ac si solum ille revolveretur circa manens latus TF; & non cum tota Figura circa RE. cuius Figurae revolutio circa RE. efficitur quidem; sed nil in Cochleae generationem facere potest.

Dicantur nunc $GI.x$. Et $QI.y$. atq; $AB = DC.b$. Et dati circuli radius $CS.r$. Cuius circumferentia denominetur c. Est $MPQ = b + r + y$. cuius radii varii circ.lus descriptus in revolutione effecta circa RE. erit $= \frac{cbb + crr + cyy + 2cbr + 2cby + 2cry}{2r}$.

Sed est $MO = MP + PI - OI = b + r - y$. Et circulus huius mutabilis radii in eadem revolutione designatus est $= \frac{cbb + crr + cyy + 2cbr - 2cby - 2cry}{2r}$. Subtrahatur haec quantitas, seu hic circulus ab alio; & quod reliquum est $\frac{4cby + 4cry}{2r}$ ductum in dx. erit Elementum solidi quaesiti; nempe exorti à solo circulo $CGLH$. in revolutione; illiusque Integrale praebebit illud solidum, sive Cochleam; quae quaeritur; per ea, quae praemissa sunt. Itaque dictum Elementum erit $\frac{4cby.dx}{2r} + \frac{4cry.dx}{2r}$.

atqui est y ob circulum $= \sqrt{2rx - xx}$. Inde Elementum est $\frac{4cb}{2r}\sqrt{2rx - xx}.dx + \frac{4cr}{2r}\sqrt{2rx - xx}.dx$. Est vero $\sqrt{2rx - xx}.dx$. Elementum semisegmenti circuli GIQ. Igitur Elementum solidi erit $= \frac{4cb}{2r} \times$ elementum semisegmenti GIQ $+ \frac{4cr}{2r} \times$ elementum semisegmenti GIQ. cuius indeterminatum Integrale erit $\frac{4cb}{2r} \times$ semisegment. $GIQ + \frac{4cr}{2r} \times$ semisegment. GIQ. Est vero semisegmentum GIQ. in H. aequale semicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$. Quare idem Integrale definitum erit

ccb

$\frac{ccb + ccr}{2}$. Et inde quaesita Cochlea erit ad sphaeram circuli genitoris; quae est $\frac{2crr}{3}$; uti circumferentia descripta à radio DCS. in revolutione; quae circumferentia est $\frac{cb + cr}{r}$; ad duas tertias partes diametri eiusdem circuli genitoris; nimirum ad $\frac{4r}{3}$. *Q. E. I.*

PROPOSITIO VIII.

FIG. XI. Sint eadem. itemque sit eadem Figura. quaeritur centrum Gravitatis Cochleae. Repetantur, quae in propositione IV. initio dicta fuere pro centro Gravitatis Cochleae illius. & suspensio est [*hypothesi*] in R. Erit (*proposit. praeced.*) Elementum solidi; seu minimum pondus $= \frac{4cb}{2r} \times$ elementum semisegmenti GIQ circuli $+ \frac{4cr}{2r} \times$ elementum semisegm. GIQ circuli. atqui; per ea, quae propositione eadem praecedenti praemissa sunt de huius Cochleae generatione; distantia varia, & mutabilis minimorum ponderum huius solidi à suspensione R. est sola sumenda abscissa GI. seu x. Ergo Element. momentorum ponderum eorumdem adversus R. erit $= \frac{4cbx}{2r} \times$ element. semiseg. GIQ, $+ \frac{4crx}{2r} \times$ elementum semisegmenti GIQ. Cuius Integrale definitum; cum sit x. in H. aequalis $2r$. & pariter in H. sit semisegm. GIQ = semicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$; erit $ccbr + ccrr$. Quod dividatur per summam determinatam simplicium ponderum $\frac{ccb + ccr}{2}$ [*proposit. praeced.*]. Et obtinebitur constans, & definita distantia centri Gravitatis à suspensione R. aequalis $2r$. distat igitur centrum

trum gravitatis Cochleae huius supra RE. à suspensione R. per dati circuli diametrum GH. $Q. E. I.$

PROPOSITIO IX.

Sint quae in Propositione VII. Et eadem sit Figura. Quaeritur Solidum enatum ex revolutione totius Figurae $BAEFHLGC$ circa manens latus AE circumactae. Solum igitur motum hunc revolutionis habet circulus $GLHC$. Et non generatur Cochlea. FIG. XI.

Sumatur circulus in revolutione descriptus ab incostanti radio $MPQ = b + r + y$ (*proposit. praeced.*) ex quo circulo nulla efficienda est subtractio alterius circuli; uti in ipsa praecedenti. Erit igitur Elementum solidi $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{crr.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{2cbr.dx}{2r} + \frac{2cby.dx}{2r} + \frac{2crx.dx}{2r}$. (*proposit. cad*) Cuius Integrale indefinitum; si loco y substituatur $\sqrt{2rx - xx}$; & loco yy subdatur $2rx - xx$; erit aequale $\frac{cbbx}{2r} + \frac{crx}{2} + \frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} + cbx + \frac{cb}{r} \overline{\quad + c} \times$ semisegmentum GIQ. circuli. atqui in H. efficitur $x = 2r$. & semisegmentum sit aequale semicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$. Quare definitum solidum erit $cbb + \frac{5}{3} crr + cbr + \frac{ccb}{4} + \frac{ccr}{4} = \frac{48cbb + 80crr + 48cbr + 12ccb + 12ccr}{48}$.

Adsumatur novus aliquis circulus datus; cuius circumferentia dicatur p. & radius q. Et inveniatur recta linea $= \sqrt{\frac{48qbb + 80qrr + 48qbr + 12qcb + 12qcr}{8p}}$; quo radio describatur circulus; qui erit aequalis quadrato dimi-

dio eiusdem rectae lineae ducto in $\frac{p}{q}$. Igitur erit aequalis $\frac{48bb + 80rr + 48br + 12cb + 12cr}{16}$. Quare; si hoc adsumpto circulo tanquam basi, & altitudine; quae sit aequalis circumferentiae c. circuli in propositione dati describatur conus; erit ille aequalis solido invento. Etenim erit conus aequalis $\frac{48cbb + 80crr + 48cbr + 12ccb + 12ccr}{48}$. Quod fuit solidum inventum.

SCHOLIUM.

Si sint eadem, quae antea; & eadem Figura XI. sed quaeratur solidum à solo circulo $GLHG$ in revolutione prognatum; facile illud determinabitur, cum sit aequale solido invento in propositione, dempto Cylindro; qui à rectangulo $ABFE$ in conversione circa latus fixum AE. cum tota Figura revoluto generatur.

PROPOSITIO X.

FIG. XII. Sit rectangulum $ABDC$; cuius lateri BD. adhaereat semicirculus FED. sitque FD. diameter supra BD. desinens in angulo D. rectanguli. Circumagatur tota Figura circa manens latus AC. dum semicirculus eodem tempore motu proprio praeter communem provehitur supra BD. Quaeritur Cochlis.

Sit $AB = CD = b$. & circuli; cuius est FED. semicirculus; radius sit r. atque circumferentia c. ducantur infinitè proximae MON, mon. parallelae AB. secantes AC. in M. m. & BD. in O. o. atq; semicirculum in N. n. Deinde abscissae FO sint $= x$. Et ordinatim ad circulum adplicitae ON. sint $= y$.

Erit $MON = b + y$. & circulus in revolutione totius Figurae designatus ab inconstanti radio MON. erit $\frac{cbb}{2r} + \frac{cyy}{2r}$

+

$+ \frac{2cby}{2r}$. Hinc Elementum ſolidi foret $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r}$. atqui ob motum progreſſionis ſemicirculi ſupra BD prolati eſſe debet $\frac{cbb.dx}{2r} = 0$. (*Coroll. Lemm. I. n.* ii.) Ergo quaeſitae Cochleae Elementum erit $\frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r}$ Eſt vero MO ſemper conſtans, & $= b$. ſed yy eſt (ob circulum) $= 2rx - xx$. atque y eſt $= \sqrt{2rx - xx}$. Inde Elementum ſolidi erit $\frac{crx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} - \frac{cb}{r}\sqrt{2rx - 2x}$. Cuius mutabile Integrale erit $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} + \frac{cb}{r} \times$ ſemiſegment. FON circuli $= \frac{6rcxx - 2cx^3 + 12\, cb \times \text{ſemiſeg}\cdot FON.\ \text{circ.}}{12r}$

Efficitur vero in D. ipſa abſciſſa $x = 2r$. Et ſemiſegmentum FON fit $= \frac{cr}{4}$. Ergo ſolidum quaeſitum erit $= 2crr - \frac{4}{3}crr + \frac{ccb}{4} = \frac{2}{3}crr + \frac{ccb}{4} = \frac{8crr + 3ccb}{12}$. Et adſumatur novus aliquis circulus datus; cuius radius ſit $= q$. atque circumferentia ſit $= p$. deinde inveniatur quantitas aequalis $\sqrt{\frac{8qrr + 3qcb}{6p}}$. quo radio deſcribatur circulus. Erit is circulus aequalis quadrato dimidio eiuſdem quantitatis ducto in $\frac{p}{q}$. Quare erit ipſe circulus aequalis $\frac{8rr + 3cb}{12}$. Igitur ſi baſi, quae ſit hic idem circulus; & altitudine $= c$. nempe $=$ circumferentiae dati circuli in propoſitione deſcriptus ſit cylinder; erit cylinder aequalis Solido Cochleae invento. Quoniam erit aequalis $\frac{8crr + 3ccb}{12}$.

Q. E. I.

PROPOSITIO XI.

FIG. XII. Sint quae antea. Et eadem Figura. Ducatur ex F parallela FI. ipsi DC. secans AC. in I. & recolantur, quae in propositione IV. ad centrum Cochleae investigandum praedicta sunt. Sitque data AI denominata m. Erit distantia indefinita ponderum Cochleae inventae in praecedenti à suspensione A (*hypoth.*) $= AIM = m + x$.

Erat (*proposit. X.*) Elementum solidi, seu minimum pondus Cochleae aequale $\frac{ccx\ dx}{r} - \frac{cxx . dx}{2r} + \frac{cb}{r} \sqrt{2rx - xx}$. $= \frac{crx.\ dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r} \times$ Element. semisegmenti FON circuli. Ducatur hoc minimum pondus in distantiam $m + x$. Et habebitur productum; quod erit Elementum momentorum solidi adversus suspensionem A. molientium. Est vero illud productum $= mcx.dx + cxx.dx - \frac{cmxx.dx}{2r} - \frac{cx^3.dx}{2r} + \frac{cbm}{r} \times$ Element. semisegmenti FON circuli $+ \frac{cbx}{r} \times$ Elementum semisegmenti FON circuli.

Integrale huius Elementi momentorum mutabile est $\frac{mcxx}{2} + \frac{cx^3}{3} - \frac{cmx^3}{6r} - \frac{cx^4}{8r} + \frac{cbm}{r} \times$ semisegment. $FON + \frac{cbx}{r} \times$ semisegment. $FON = \frac{144mrcxx + 96crx^3 - 48cmx^3 - 36cx^4}{288r}$ $\frac{+ 288\ cbm \times \text{semisegment. } FON + 288\ cbx \times \text{semisegment. } FON.}{288r}$ quod dividatur per inconstantem summam ponderum simplicium $\frac{6rcxx - 2cx^3 + 2cb \times \text{semisegment. } FON.}{12r}$ (*proposit. X.*) Et praebebit distantiam indefinitam centri Gravitatis Cochleae à suspen-

ſpenſione A. Deinde, cum ſit x. in D. ſeu $C = 2r$. & ſemiſegment. FON in D. ſit $= \frac{cr}{4}$; ſi loco x. & ſemiſegmenti FON. hae aequalitates ſufficiantur in dicta effecta diviſione; habebitur pro toto ſolido diſtantia quaeſita centri Gravitatis Cochleae inventae, & definita ſupra AC. (*eadem Figura*) à ſuſpenſione A. $= \frac{193mcr^3 + 193cr^4 + 72bmccr + 144bccrr}{192cr^3 + 172ccbr} = m + \frac{192r^3 + 144bcr}{192rr + 72bc}$. Erit igitur centrum quaeſitum intus IC (*ead. Fig.*) in qua IC. ſumatur ex puncto I verſus C quarta Geometrica poſt $192rr + 72bc$; & $192rr + 144bc$; & poſt r. atqui eſt ea quarta Geometrica maior ſemidiametro r. circuli dati. Ergo; ſi agatur ex huius circuli centro Q. parallela QH. ipſi CD; occurrens AC. in H; manebit centrum intus HC. Diſtantia haec inventa centri Gravitatis à ſuſpenſione A. mechanicè determinabitur. Etenim dicta quarta Geometrica non habebitur, niſi ſumatur dati circuli in propoſitione circumferentia c.

PROPOSITIO XII.

Sit rectangulum $ABDC$ generans Cochleam cum advincta lateri BD. parabola FDE. (*definit.*) Quaeritur Cochlis. ducantur duae infinitè proximae MON, mon parallelae CDE; ſeu AB, occurrentes AC in $M.m$. & BD. in $O.o$. atque parabolae perimetro in $N.n$. Eſt quidem FD. axis parabolae. Cuius parameter dicatur p. Et ſit $CD = b$. Et peripheria circuli deſcripti in revolutione à radio dato CE. dicatur c. atque CE. radius denominatus ſit r. Dein abſciſſae FO parabolae ſint dictae x. atque ordinatae $ON.y$. Inde MON. erit $= b + y$. Et circulus in revolutione deſcriptus à radio mutabili MON. erit $= \frac{cbb}{2r} + \frac{c^y y}{2r} + \frac{cby}{r}$. Igitur Elementum ſolidi; ſi parabola FIG. XIII.

bola motu proprio in revolutione non prorepercet supra BD. foret minimus cylinder $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r}$. cuius indefinitum Integrale; cum sit $yy = px$; atque $y = \sqrt{px} = px^{\frac{1}{2}}$ ob parabolam; esset $\frac{cbbx}{2r} + \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r}cbpx.^{\frac{3}{2}}$ Ergo ob motum progressionis parabolae; Integrale indefinitum erit $\frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r}cbpx^{\frac{3}{2}}$ (*coroll. Lemm. I. n.* I. & III.) $= \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3}cbp\sqrt[2]{xxx} = \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r}cbpx\sqrt[2]{x} = \frac{3cpxx + 8cbpx\sqrt{x}}{12r}$.

Est vero x. si axis FD. parabolae dicatur a. atque basis DE denominetur m; aequalis in D. ipsi a. Unde pariter in D. est $\sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{\frac{mm}{p}}$. Inveniatur ipsi $\frac{\sqrt[2]{mm}}{p}$. aequalis $\frac{n}{q}$. Ergo quaesitum totum solidum erit $= \frac{cpaa}{4r} + \frac{2cbpan}{3qr} = \frac{3cpqaa + 8cbpan}{12rq}$. Inquiratur recta linea aequalis $\sqrt{\frac{3qpa + 8bpn}{6q}}$ quo radio describatur circulus. Erit is circulus $= \frac{3cqpa + 8cbpn}{12rq}$.

Itaque si altitudine a; & basi; quae sit circulus ille; constituatur cylinder; erit cylinder aequalis Cochleae huic parabolicae. Nam erit cylinder aequalis $\frac{3cqpaa + 8cbpna}{12rq}$. quae Cochlea fuit inventa. Quod erat primum

Invenietur nunc Cochleae centrum. Et mente recolantur, quae in propositione IV. pro centro Gravitatis Cochleae illius antea commonentur. atque è vertice parabolae F (*ead. Fig.* XIII.) ducatur FI. aequidistans CDE. & occurrens lateri AC. rectanguli in I. Atque data AI. dicatur l. Erit Elementum solidi; seu minimum pondus $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r} = \frac{cyy.dx}{2r}$ EADEM FIG.

+

$+\frac{cby^{2}.dx}{r}$. ob motum progreſſionis parabolae, quae eodem tempore revolutionis totius Figurae procedit motu proprio ſupra rectanguli latus BD. (*Coroll. Lemm. I. n. 2.*) quare ob parabolam idem Elementum erit $\frac{cpx.dx}{2r}+\frac{cbpx^{\frac{3}{2}}dx}{r}$. Eſt vero diſtantia ponderum ſolidi enitentium adverſus ſuſpenſionem A (*hypothesi*) aequalis $l+x$. Igitur Elementum momentorum erit $\frac{cplx.dx}{2r}+\frac{cpxx.dx}{2r}+\frac{cbplx^{\frac{1}{2}}dx}{r}+\frac{cbpx^{\frac{3}{2}}.dx}{r}$. Cuius indeterminatum Integrale eſt $\frac{cplxx.}{4r}+\frac{cpxxx}{6r}+\frac{2}{3r}cbplx^{\frac{3}{2}}$

$$+\frac{2}{5r}cbpx^{\frac{5}{2}}=\frac{90\,cplxx+60\,cpx^{3}+240\,cbplx^{\frac{3}{2}}+144\,cbpx^{\frac{5}{2}}}{360r}$$

$$=\frac{90\,cplxx+60\,cpx^{3}+240\,cbplx\sqrt{x}+144\,cbpxx\sqrt{x}.}{360r}$$

Dividatur hoc Integrale per variam ſummam ponderum ſimplicium; quae hic ſuperiùs erat $\frac{3cpxx+8cbpx\sqrt{x}}{12r}$. Et habebitur diſtantia indefinita centri gravitatis à ſuſpenſione A. ſcilicet $\frac{90lx+60xx+240bl\sqrt{x}+144bx\sqrt{x}}{90x+240b\sqrt{x}}=l+\frac{60xx+144bx\sqrt{x}}{90x+240b\sqrt{x}}$. Fit vero x in D. aequalis a. Et $xx=aa$. & eſt $\sqrt{x}=\sqrt{a}$. efficitur autem $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{mm}{p}}$. in eodem puncto D. Sed erat ſupra $\sqrt{\frac{mm}{p}}=\frac{n}{q}$. Ergo diſtantia definita centri Gravitatis Cochleae huius parabolicae à ſuſpenſione A. erit $=l+\frac{60qaa+144ban}{90qa+240bn}=l+\frac{30qaa+72ban}{45qa+120bn}$.

Itaque diſtat cetrum Gravitatis Cochleae à puncto A. per rectam

ctam supra AC. aequalem AI cum quarta Geometria post $45qa$ $+ 120bn$; & $30qa + 72bn$; & a: quae quarta minor e't quidem quàm a. Et manet centrum intus IC. Quod erat secundum.

Esame d' una Macchina inventata pel Moto perpetuo.

TAV. X. Disegno della Macchina. FIG. I.

ESsendo io in Firenze l' Anno 1753., nelle vacanze estive della Pubblica Accademia Pisana; mi fu spontaneamente ragionato il mese di Luglio, d' una Macchina di Moto perpetuo; acciocchè l' esaminassi; e ne dessi il mio giudizio; il quale quì esporrò con descriver prima la Macchina; che io non vidi: e neppure vidi il modello; ma solamente mi fu quella spiegata a voce dall' Autore; e poi me ne fu dal medesimo recato il disegno; che è quì nella Figura rappresentato.

Costa la Macchina del Peritrochio DE; il quale deve essere il Mobile perpetuo. E' composto DE d' una prima ruota esteriore DQE mossa intorno dall altra interiore concentrica BC. E sono ruote amendue dentate. Volgesi in giro BC. e quindi DQE. trasportata BC dall' asse AFG; che passa per A. centro comune. E vien mosso AFG. dal sospesovi peso X. nell' estremità F; essendo l' altra estremità G. del tutto libera. Il medesimo asse AFG. agiatamente si raggira intorno A. perchè si posa via via sopra gli zoccoletti $z.z.z.$ applicati a tutta la circonferenza interiore BC. ad ugual distanza; e i quali poi va esso medesimo asse nel moto sormentando. Dunque FAG intorno il punto A. s' aggira liberamente; e non scorre avanti, e dietro per esso A.

Giace sopra la ruota esteriote DQE. il rocchetto L. pure den-

dentato. E mentre questa rota si rivolge verso una parte *DQ.* il rocchetto *L.* gira intorno all' opposta *DE.* E' inserito nel rocchetto pel centro *L.* un Asta *MLM.* avente come due cucchiai *M. M.* nelle due estremità. Il detto movimento del rocchetto fa, che l' asta *MLM.* si rivolga intorno *L.* e giunta l' asta in *P.* tramanda nel canale *PO.* sorretto dal sostegno P. una palla *Y.* che portava dentro la scodella, o il cucchiaio *M.* La qual palla è uguale al peso *X.* ma il braccio canaliforme *PO.* è più lungo di *AF* in ragione; siccome si è fatto; di cinque a quattro. Quindi il momento per *PO.* prepondera col momento per *AF.* contro l' ipomochlio *P.* FIG. I.

Arrivata dunque la palla *Y.* all' estremità *O.* del braccio *PO.* s' innalza *AF.* e s' abbassa *PO.* fin dove ritrovando *PO.* un altro inferior canale *TS.* ben sostenuto, e accomodato nella Macchina per la struttura della medesima; vi scarica dentro la palla *Y.* in *o.* Ma perchè *TS.* è inclinato all' orizzonte da *S.* a *T.* la palla scorre da *S.* nel ricetto *T.* del medesimo canale *TS;* dove si ferma, e aspetta, che colà si riconduca l' asta *MLM.* la qual' asta giuntavi prende essa palla col suo cucchiaio *M;* come rappresenta la Figura; e continova la rivoluzione. Già sono due le palle eguali. E l' asta *MLM.* volgendosi intorno ritiene in un cucchiaio *M.* una palla; e nell' altro non ha nulla; ma ritrova la seconda palla ferma; come si è detto; nel ricetto *T.* incavato in modo, che possa col cucchiaio *M.* facilmente innalzarla, e dentro riceverla. FIG. I.

Il canale *PO.* resta prolongato dall' altra parte in altro braccio *PN.* dal di cui estremo *N.* pende il filo *NF.* che s' intersega con l' asse *GAF.* in *F.* dove è attaccato; siccome si è detto; il peso *X.* FIG. I.

Dipoi vi è un altro scapo *ZPR.* simile a *NPO.* cioè il di cui braccio *PR.* è uguale al braccio *PO.* e il braccio *PZ.* uguale al braccio *PN.* E dall' estremità *Z.* di *PZ.* pende ancora un filo *ZH.* uguale a *NF.* il quale *ZH.* sega pure in *H.* un altr' asse *IAH.* condotto pel medesimo centro *A.* del peritrochio *DE.* similmente

Q come

come *GAF*. ed è pure affiffo all'eftremo *H*. altro pefo *X*. uguale all'altro *X*. parimente come quefto *X*. fta attaccato in *F*. Dunque reftando fempre la fopra mentovata preponderazione; mentre *PO*, s'abbaffa in *Po*. s'alza la parte *PAFN*. in *PAfn*. e nello ftef-
FIG. I. fo tempo s'abbaffa *PAHZ*. s'alza *PR*. E così fempre alternando tanto le due Figure *PAFN*, e *PAHZ*; quanto le due braccia *PO*. *PR*. i loro movimenti all'insù, e all'ingiù; ne feguirà il Moto perpetuo. Quando fi dice la Figura *PAFN*; o pure *PAHZ*. s'intende; che fia immaginata una retta linea *PA*. che congiunga i due punti *A*. e *P*. e fia formata come una figura quadrilatera *PAFN*. o pure *PAHZ*.

Tale è appunto la Macchina, che l'Autore a voce mi fpiegò; ficcome fi è detto nel principio; e la quale ei diffe effere la fua Macchina di Moto perpetuo. E infieme fe ne abbozzò il difegno; il quale poi fu interamente formato; e dal medefimo Autore approvato; anzi egli medefimo lo delineò, o fece delineare; e me lo diede; e che ferbo preffo di me. Ed effo Autore più volte da me interrogato rifpofe; effere in quel difegno affai bene, ed appieno rappresentata la fua propria architettata Macchina. Quefto difegno è riportato perappunto nella noftra Figura della Tavola X. Dunque fu tal Macchina farà ragionamento. La Macchina è certamente di bella invenzione; e fottilmente meditata. Dichiarerò ora le mie difficoltà, ed oppofizioni intorno la medefima.

FIG. I. I. I due affi *AF*. e *AH*. o pure i due trapezj *PAFN*. e *PAHZ*. da una banda, e dall'altra i due canaletti *PO*. e *PR*. movendofi; ficcome fi è detto; vicendevolmente all'insù, e all'ingiù; e movendofi fempre fenza punto mai reftare; come è neceffario pel Moto perpetuo; e fi raccoglie dalla formazione medefima della Macchina giufta la fattane defcrizione; fono come due pendoli di quà, e due di là; i quali fempre ofcillano a vicenda. Si deve dunque fendere il mezzo refiftente dell'Aria. E'ciò manifefto. Or non riconofco io in tal Macchina particolar forza per fuperare tal refiftenza; oltre quella, che fi richiede per la continua-

tinuazione del Moto. Onde ei parrebbe, che per tal cagione si dovrebbero a poco a poco tali corpi ridurre alla quiete. E' ben noto, quanta habbia possanza l'Aria di resistere al moto de' corpi; e perciò finalmente di riporli in quiete, i quali altrimenti seguiterebbero sempre a muoversi. Così accade nel pendolo semplice, e volgare; che per tale impedimento, e per la frizione, che soffre nell'appiccagnolo; ma principalmente per la prima causa; si riduce alla quiete. E sarebbe il pendolo senza tal impedimento la più vera, ingenua, e sicura Macchina di Moto perpetuo; che si potesse ritrovare; dimostrandosi nella Meccanica mattematicamente; che giunto il peso d'esso pendolo all'infimo punto di discesa acquista sempre ivi forza di risalire ad un'altezza uguale a quella, donde principiò la caduta. I suddetti trapezi *PAFN.* e *PAHZ.* se non si voglion prendere come pendoli semplici, si prendan pure come composti: e sarà una cosa medesima.

E' vero, che in questa Macchina volta per volta s'induce nuova forza pel moto ad essi trapezi, o assi; ed a i canali *PO .PR.* dalla palla, che vi scorre nell'estremitadi *O*. e *R*. Onde parrebbe, che si rinnovassero sempre gl'impulsi; i quali potrebbero metter compenso agl'impedimenti della resistenza del mezzo. Ma tali impulsi, dico, non possono produrre tal'effetto; nè questo loro appartiene. Servono solamente quelli, e le palle per far chè si muova il peritrochio *D Q E*; senza cui questo si starebbe: e non han che far nulla con una diversa forza, e speciale, che superi la resistenza dell'Aria. Ancora i pendoli hanno continovi, e nuovi impulsi della gravità; massime nell'infimo punto di caduta, per ciò che si è detto; ma questi fanno solamente, che il pendolo possa in su, e giù agitarsi. E non tolgon punto l'impedimento della renitenza dell'Aria. FIG. I.

II. Non mancano soffregamenti nella nostra Macchina contrarii tutti ad un moto sempre durevole. Questi sono uno principalmente in *A*. il quale equivale all'ostacolo, che patisce il Pendolo nel FIG. I.

nel punto, o luogo di sospensione: dipoi altro consimile è nel centro *L* del rocchetto. e nei denti delle ruote *DQE*. e *BC*. e in quelli del rocchetto *L*. e soprattutto negli zoccoletti *z.z.z.* sparsi per tutta l'interiore circonferenza della rota *BC*. come si è detto; ne' quali tanto l'uno, quanto l'altro asse *GAF*. *IAH*. deve sì spesso urtare; e poi sopra essi risalire: di più nel sostegno *P*. In somma questa Macchina non è poco composta e di denti, e di vetti, e di canali, e di ruote. Onde al grand' ostacolo; che pel Moto perpetuo nasce da soffregamenti; e che quasi sempre è non piccola cagione; per la quale non si possono conseguire simil Macchine; è molto quella sottoposta. E' poi notissimo, che queste frizioni difficilissimamente si possono con accuratezza stimare; e come dir si suole; ridurre a calcolo. Quindi è, che non si ritrova mai una contraria forza compensatrice, e contranitente; sicchè il mobile libero da quelle persista nel moto, come dovrebbe.

FIG. I. III. In questa Macchina; siccome apparisce dalla descrizione; opera ora l'una, ora l'altra di due bilancie; le quali sono per vicenda il movente del Mobile perpetuo; che sarebbe il peritrochio *DQE*. Vna ha un braccio *PO*. col peso della palla *Y*. quando questa giugne in *O*. e l'altro braccio *AF*. col peso uguale *X*. attaccato all'estremità *F*. E l'altra ha un braccio *PR*. col peso della stessa palla quando è in *R*. e l'altro braccio *AH*. coll'ugual peso *X*. nell'estremo *H*. E' poi sostegno comune *P*. Ora dunque si dice, che si moveranno sempre e gli assi *AF*. *AH*. ed i canali *PO*. *PR*. per la fatta preponderazione nel costruirsi la macchina, del momento per *PO*; o per *PR* appetto al momento per *AF*; o per *AH*. intorno *P*; come sopra, nella descrizione d'essa Macchina. Ma io sostengo, che queste bilancie non sono ben constituite; e che perciò non vi può essere una giusta, e costante preponderazione: e quindi non si potranno mai muover bene quei mobili; come si vorrebbe; se non per poco, e a risalto: e che molto meno vi possa essere un moto durevole. Dunque in ciò consiste la fallacia della Macchina. Ne prenderemo una

di

di queste due bilancie; essendo amendue; come si è veduto; del tutto simili. Questa sarà *HAPR*. E s'immagini già congionta la retta *PA*. come si disse nel principio.

IV. Già *PR*. non sta in una, e la medesima linea con *AH*. FIG. I. Bisogna dunque necessariamente così pensare, che stia la bilancia *HAPR*. cioè che sia *PR*. un braccio col peso della palla in *R*. quando la palla v' arriva; e *P*. il sostegno; e l' altro braccio sia *PZ*. a cui un trapezio *PZHA*. sia coerente; e non pendente da qualche filo. Ora se il trapezio *PZHA*. si concepisca come grave; e si ponga, che abbia due lati opposti *PZ*. e *AH* paralleli; onde sia regolare; e si divida *PZ*. in due parti uguali in *e*. così pure *AH*. in due parti uguali in *m*; e si congionga *me*. la quale sia partita in tre parti uguali in *b*. e *k*. e poi si faccia come la prima *AH*. alla seconda *PZ*. così la terza *bi*. alla quarta proporzionale Geometrica *ik*. sarà *i*. centro di Gravità del trapezio; e la retta *em*. la linea del centro. Quindi, se sia collocata *me*. perpendicolare all' orizonte; e il raggio *PR*, sia maggiore del raggio *Pe*; ma il trapezio uguale di peso al grave posto in *R*. e si faccia la sospensione per *P*. o pure sia *P*. un sostegno; s' abbasserà *PR*. descrivendo col punto *R*. il cerchio *Rp*. intorno *P*. e s' inalzerà il trapezio *PAHZ*; descrivendo il punto *e*. per dove sospeso centralmente si considera il trapezio; parimente un cerchio *ef*. intorno *P*. sendo che intorno *P*. prepondera *PR*. colla palla in *R*. in comparazione del trapezio. Ma il trapezio *PAHZ*. fu un grave immaginario ritrovato; dirò così; in favore della Macchina per salvare la bilancia. e quindi la preponderazione; benchè il raggio *AH*. non stia nell' istessa linea col raggio *PR*. E potrebbe fare le veci del trapezio il grave *X*. nella bilancia; se non vi fossero altre difficoltà? Primieramente il grave *X*. dovrebbe essere affisso non al punto *H* estremo dell' asse *AH*; come nella Macchina; ma al punto *m*. estremo della detta linea del centro *me*. normale all' orizonte, siccome si è detto; se si dovesse costituire la bi-

bilancia; di cui fosse un raggio PZ. che avesse un trapezio $PAHZ$. immaginario di soli quattro fila PA. $AH.HZ$. ZP. e senza gravità; ma che facesse le veci di quello un grave attaccatovi; ed altro raggio fosse PR. che sostenesse in R. l'altro grave da contrappesarsi col trapezio, o sia col grave affissatovi; e da preponderare.

FIG. I. V. In secondo luogo: ancorchè X. fosse ben collocato in H. dove s'intersegano il vette AH. e il filo ZH; e non vi fosse la considerazione del trapezio; non per tanto non si potrebbe ottenere questa bilancia; e non potrebbe giammai il peso X. far contrappeso colla palla Y. posta in R. e preponderare. Conciossiachè il peso X. non è libero pendente in H. pel filo ZH. dal raggio PZ. Vi è un' altra forza del vette, o asse HAI. dalla quale avrebbe a ricevere il grave X. un moto diverso da quello; che dovrebbe avere libero pendente dal filo ZH. acciocchè s' innalzasse, o s' abbassasse, quando s' abbassa, o s' innalza il braccio PR. col suo peso. Poichè mentre AH. volgesi intorno A. punto fisso dell' asse AI. in A. centro del peritrochio; si avrebbe a rivolgere ancora PZ. intorno il fermo sostegno P. secondo la Macchina. Dunque ricever dovrebbe il peso X. nel tempo medesimo due dissimili moti, uno di rivoluzione intorno A. per cui avrebbe a descrivere un cerchio col vette AH. e l'altro per l' insù, o per l' ingiù, con cui venir tirato ei dovrebbe, ed abbassato dal filo ZH. pel quale è sospeso; mentre PZ. gira intorno P. E ciò manifesto secondo questa Macchina; e siccome si riconosce dalla descrizione della medesima. E si vuole bilancia; perchè si dica di preponderazione del braccio PR. maggiore del braccio AH. essendo il peso della palla posta nell' estremità di PR. uguale al peso posto nell' estremita di AH. Nè si potrebbe in questo sistema ritrovar' altro principio, e altra cagione del moto fuori della spiegata bilancia. Ora io non intendo come nel modo narrato di quel contrasto, e contrannisо de' due diversi movimenti da imprimersi al grave X. nel medesimo tempo, possa giammai farsi moto in que-

questa Macchina tale, che addivenga una preponderazione regolare; e di giusta, e vera bilancia: se non per poco, ed a rimbalzo; non che durevole, e continovo; siccome si diceva nel numero III. Di fatti sentiva io dire; che la Macchina non fosse mai stata condotta a fine, e compiutamente perfezionata.

VI. In due maniere potrebbero accadere i due suddetti diversi moti; ed imprimersi nello stesso tempo al grave *X*. La prima sarebbe, se il vette *IAH*. non girasse descrivendo cerchio intorno il punto *A*; ma scorresse avanti, e dietro per esso *A*. E allora il peso *X*. non si condurrebbe per dove si richiederebbe nella preponderazione di una giusta bramata bilancia. Si farà ciò manifesto, se si determinerà la traccia, che percorrerebbe *X*. o il di lui centro di gravità coll' impressione ricevuta di quei due diversi movimenti. Si ritrova così questa traccia. Rivolgasi intorno il centro *P*. del cerchio *BCD*. il di lui raggio *PN*. e nell' istesso tempo, e colla medesima celerità di moto equabile; quale esser deve in questo caso; sia condotto dall' estremo punto *N*. del raggio *PN*. il rigido, e teso filo *NH*. di lunghezza dato; il di cui estremo punto *H*. s' interseghi con altro filo, o altra regola *HAI*. che scorra avanti, e dietro pel punto fisso *A*. Si cerca la linea descritta dalle intersezioni *H*. FIG. I. FIG. II.

Si ritrovi pel suo moto *PN*. ora in *N*. e poi in *M*. sopra la periferia del cerchio: e *HAI*. ora in *H*. ora in *H*: e il filo *HN*. ora in *KN*. e ora in *HM*. siccome rappresenta la Figura seconda. Seghi dunque il filo *HN*. la periferia in *O*. quando si ritrova in *HN*. e la seghi in *Q*. quando giace in *HM*. Si congiungano le rette *OP*. *QP*. *NP*. *MP*. È chiaro, che gli archi di cerchio *OQ*. *NM*. percorsi nell' istesso tempo, e col medesimo moto equabile d' un medesimo filo sieno uguali. Quindi; aggiunto di comune l' arco *QBN*. sarà sempre la periferia *OBN*. uguale alla periferia *QBM*. onde la corda *ON*. sarà uguale alla corda *QM*. dunque sarà sempre data, e costante questa corda nel moto del raggio *PN*. e del filo *NH*. si prenda il filo posto in *HON*. e dal centro *P*.

 del

del cerchio si abbassi la normale PK. in K. sopra la corda ON. si unisca HP. sicchè sia formato il triangolo HNP. In questo triangolo è costante, e dato l' angolo HNP. Poichè nel triangolo NKP. è sempre dato, e costante il lato KN. metà della corda ON. sempre la medesima; come si è dimostrato. ed è dato ancora sempre il lato PN. raggio del cerchio dato; e l' angolo NKP è retto. dunque sarà sempre dato, ed immutabile l' angolo KNP. o sia HNP. E dato ancora in esso triangolo HNP. il lato PN. e il lato, o filo sempre il medesimo NH. dunque sarà dato l' altro lato PH. e sempre il medesimo. Ma l' interfezione H. sta per appunto nell' estremo punto H. di PH. e il punto P. è punto fisso. Dunque l' interfezione H. o pure un grave; o sia il di lui centro posto in H. descriverà un cerchio intorno P. coll' intervallo PH. secondo que' due differenti moti. Quindi si è determinata la via, che segnerà il grave X. da que' due diversi, e sopra spiegati moti agitato. Ma è impossibile; che ciò quì accada; ed indi che si costituisca una bilancia con preponderazione; della qual bilancia un raggio sia PR. col peso in R. e l' altro; congiunta PH; sia PH. col peso in H. il qual raggio PH. faccia sempre angolo HPR. coll' altro raggio PR. sicchè mentre un raggio PR s' abbassa descrivendo cerchio
FIG. I. intorno P. l' altro PH. a vicenda s' innalzi descrivendo cerchio parimente intorno P. quando poi un' altro raggio PZ. descrive altro cerchio pure intorno P. Dunque non potrebbe sossistere in questa Macchina la bilancia colla preponderazione; se que' due suddetti moti fossero impressi al peso X. trascorrendosi liberamente avanti, e dietro dall' asse AI. il fisso punto A.

FIG. I. VII. L' altra maniera sarebbe; se il Vette HAI, non scorresse avanti, e dietro pel punto A. ma si rivolgesse intorno A. fisso permanente; sicchè descrivesse un cerchio. E questo veramente si pone nella Macchina; come fu detto nella descrizione della medesima. E si è enunciata l' altra maniera per esporre tutti

i ca-

i casi: ma neppure in questo modo pare, che possa farsi nella Macchina la richiesta durevole preponderazione. Sia fatta la preponderazione pel punto *Q*, nello scapo *AD*. di qualsivoglia bilancia; sicchè si debba alzare il braccio *QA*. dal cui estremo *A*. mediante un filo *NP*. penda il grave *P*. e debba abbassarsi l' altro braccio *QD*. dal di cui estremo *D*. sia pur sospeso mediante un filo *DI*. il grave *I*. ora il limite, che nell' alzarsi segnerà il centro di gravità del peso *P*; pel qual centro già s' intende sempre, che passi il filo; sarà un cerchio; il di cui centro *C*. si ritrova in *QK*. tirata dal punto *Q*. normale all' orizonte; ed è distante da *Q*. per *QC*. uguale alla lunghezza del filo: ed il raggio è *CP*. uguale al braccio *QA*. della bilancia. Si dimostra. Poichè sia preso una volta l' asse *AQD* della bilancia posto orizontalmente: o sia presa altra retta linea *AQD*. in posizione orizontale pel punto *Q*. e sia fatta sopra la normale *QK*. in *Q*. la porzione *QC*. uguale al filo *NP*. Sendo che il filo *NP*. procede sempre à perpendicolo; si moverà sempre parallelo a *QK*. e quindi a se medesimo. Ma si potrà sempre congiungnere colla retta *PC*. il fisso punto *C*. e qualunque punto *P*. delle vestigia del centro di gravità del peso moventesi all' insù. e il braccio *QA*. passa sempre per *N*. e *Q*. descrivendo il cerchio intorno *Q*. mentre s' innalza il filo col peso; onde due rette linee *NP*. *QC*. parallele, ed uguali saranno sempre congiunte verso la medesima parte da due *NQ*, *PC*. Dunque *NQ*. *PC*. saranno sempre uguali, e fra loro parallele. e perciò *PC*. sempre costante; e uguale sarà al braccio *QA*. E sarà parallelogrammo *NPCQ*. Laonde il centro del peso *P*. pel cerchio determinato *PL*. sempre nell' alzarsi si dovrà portare. FIG. III. FIG. III. FIG. III.

VIII. Concorda per appunto l' analisi algebrica. Conciosiachè; fatta la costruzione di sopra; da uno qualunque punto *P*. della via, per cui dovrebbe andare il centro del peso; e la quale si cerca; si tiri *PO*. parallela alla *AQD*. Sarà *PO*. per la costruzione normale in *O*. sopra *QK*. E gli angoli in *O*. e *O*. retti. E siano le ordinate *PO*. chiamate y. e le ascisse *QO*. sopra FIG. III.

la data di posizione QK dall' origine fissa Q. sieno x. e il raggio dato QN. sia denominato a. e il dato filo b. dal quale sia sempre segata AQD in T. T. sarà l' angolo in T. sempre retto, e NT. sarà sempre $b - x$. Ma il quadrato di NQ. è sempre uguale a due quadrati di NT. e di TQ. dunque si averà sempre $aa = bb - 2bx + xx + yy$. il quale è un luogo al cerchio; dovendosi necessariamente costruire colle ordinate ad angolo retto sopra il diametro. E si costruisce, e determina per l' appunto, come sopra nella soluzione sintetica si fece.

Se il filo fosse uguale al braccio QA. della bilancia; allora il cerchio PL. descritto dal peso passerebbe pel punto Q, dove gli sarebbe tangente AQD. siccome sempre gli è tangente il filo col peso P. E se il braccio QA. fosse maggiore del filo; allora il medesimo cerchio trapasserebbe la AQD. E sarebbe la medesi-
FIG. III. ma cosa; come nella Figura si scorge. L' istesso poi in tutto succede ritrovato, e dimostrato tanto colla sintetica, che coll' algebrica Geometria nell' altro raggio QD. che si abbassa nella bilancia. Poichè il centro del sospesovi peso I. descrive andando all' ingiù un cerchio somigliante onninamente al descritto dal peso P. che s' innalza: e il di lui centro sta pure nella normale QK. in distanza da Q. uguale al filo DI. e il raggio è uguale al braccio, che si abbassa QD. con questa sola differenza, che
FIG. III. il centro del peso ascendente risale per la convessa periferia; ma del peso descendente si conduce per la concava del cerchio; giusta le cose dette. E un filo DI. può essere maggiore, o minore dell' altro NP. e ancora a quello eguale; prendendosi pel grave posto nell' estremo della bilancia tutto insieme il filo col peso attaccatovi. Accade così il tutto nella preponderazione di qualsivoglia bilancia. Ciò che non ho veduto, e saputo ritrovare trattato da altri.

IX. Ora nella nostra Macchina non è già posta la distanza
FIG. I. PA. uguale al filo ZH. o NF. nè il vette AH. raggio del cerchio descritto dal grave X. intorno A. si fa uguale al braccio PZ.

PZ. della bilancia. Dunque la femita del centro di *X*. non farà nell' innalzamento quella, che fi richiede nella preponderazione di bilancia; perciò, che è ftato dimoftrato. A tal cagione fi diffe nel Num. III. che non fi ritrovava in quefta Macchina una giufta, e coftante preponderazione: e fi affermò in quefto confiftere la fallacia della medefima. Tanto più, che; come apparifce dalla defcrizione della Macchina; non fu mente dell' Autor della Macchina, e fpiegazione fatta da lui intorno la medefima quella di confiderare la figura quadrilatera *ZHAP*. affiffa al braccio *PZ*. dello fcapo; con tutto il refto ragionato quindi proveniente; ma fu prodotta da noi invenzione per tor via l'affurdo di due braccia *PR*. *AH*, d'una bilancia, non meffe in una, e la medefima linea retta. (Num. IV.)

Conofco bene poterfi opporre a tali ragioni, non effer fempre neceffario in ogni preponderazione di bilancia, che il centro di gravità del pefo defcriva alzandofi, o abbaffandofi il fopra definito cerchio; ma folamente quando fta attaccato ad un filo libero pendente dal braccio della bilancia; il quale effere cafo fpeciale di preponderazione: del refto poter bene effo centro nella bilancia; che prepondera; percorrere altra via da quel cerchio per qualche particolar cagione di diverfo moto impreffo al pefo; oltre quello della bilancia preponderante; o per altra fimile: e quefto accadere nella prefente Macchina; in cui il pefo *X*. oltre il moto datogli per l'insù dal filo tirato dal braccio *PZ*; che s'innalza, e defcrive cerchio intorno *P*; riceve l'altro moto dal vette *AH*. aggiratofi intorno *A*. i quali due moti poffono bene efercitarfi. Ed effo pefo *X*. altro non fa, che difegnare intorno *A*. coll' intervallo *AH*. un cerchio; per dove fi porta. Ma non è la fopra determinata traccia circolare; effendo quella neceffaria folamente, quando è il filo libero cadente dal braccio della bilancia; e il grave è pel medefimo filo liberamente fofpefo. In fecondo luogo dir fi potrebbe, che quando ancor foffe neceffaria la via circolare determinata di fopra; per FIG. I.

do-

dove in ogni preponderante bilancia si dovesse il centro del grave condurre; facilmente s'affetterebbe questa Macchina; col far la distanza *PA*. uguale al filo; e la lunghezza del vette *AH*. uguale al raggio *PZ*. della bilancia. Tuttociò che si dice d' una bilancia di questa Macchina, s' intenda dell' altra appieno uguale. Siccome fu dichiarato nella fine del Num. III.

X. Ma rispondo. Egli è vero, che il peso *X*. que' due moti può ricevere; e coll' asse *AH*. in cui sia inserito, descriver cerchio intorno *A*. poichè possono due raggi *PZ*. *AH*. raggirarsi
FIG. I. ognuno intorno il suo centro *P*. e *H*, descrivendo cerchio; benchè un teso filo, o lato *ZH*, li connetta; e li tiri; purchè però gli angoli in *P*. in *A*. in *H*. in *Z*. non sieno verun di loro costanti, e i medesimi; ma tutti mutabili, ora maggiori, ora minori; non pertanto non crederò in primo luogo mai, ancora fuori del caso di questa Macchina; poter quei due moti, e quel percorso limite circolare dal centro del peso nell' alzarsi convenire colla preponderazione di una stabile, legittima, e ben co-
FIG. I. stituita bilancia; onde stimerò sempre, dover il peso col filo esser libero pendente dal braccio della bilancia: e principalmente in secondo luogo, mai non mi persuaderò, quei due moti, e quel tramite circolare poter convenire colla preponderazione di questa Macchina; messo insieme il tutto; e quella nuova sorta di mancante equilibrio; e quei due moti impressi al peso ascendente con quella non consueta via, per dove ei cammini; e la difficoltà di trovarsi volta per volta la palla *Y*. nell' estremo del braccio *PY*. quando, e come egli è d' uopo; e le tante parti, di cui è com-
FIG. I. posta la Macchina; e 'l grand' impedimento, che dalle sì varie, e molte frizioni sopra mentovate proviene; massimamente dalla resistenza dell' aria: tanto più poi se 'l movimento debba esser continuo, e sempre durevole. Onde fermamente giudico, che non possa questa esser Macchina di moto perpetuo.

IL FINE.

D. IANVARIVS MARIA DEL PEZZO PRAEPOSITVS GENERALIBVS CLERIC. REGVLAR.

HOc Opus inſcriptum Problemata Varia Mathematica a R. P. D. Iohanne Baptiſta Caracciolo noſtrae Congregationis Theologo, & in Piſana Academia Pubblico Matheſeos Profeſſore compoſitum, & iuxta aſſertionem Patrum, quibus id commiſimus approbatum; ut Typis mandetur; quoad Nos ſpectat; facultatem concedimus. In quorum Fidem praeſentes litteras manu propria ſubſcriptas, & ſolito noſtro Sigillo munitas dedimus. Neapoli in noſtris Aedibus S. Pauli Maioris. Die 15. Octobri Anno 1754.

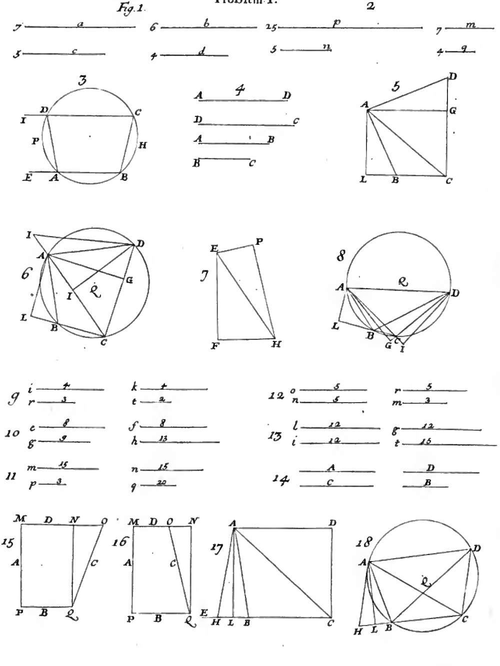
Dominus Ianuarius Maria del Pezzo
✠ *Praepoſit. Gener. Cleric. Regul.*

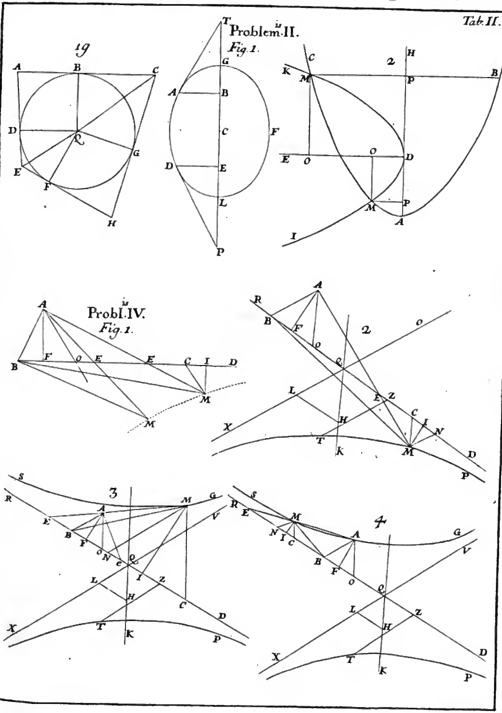
D. Raphael Venturini C. R. Secret.

ERRATORVM EMENDATIONES.

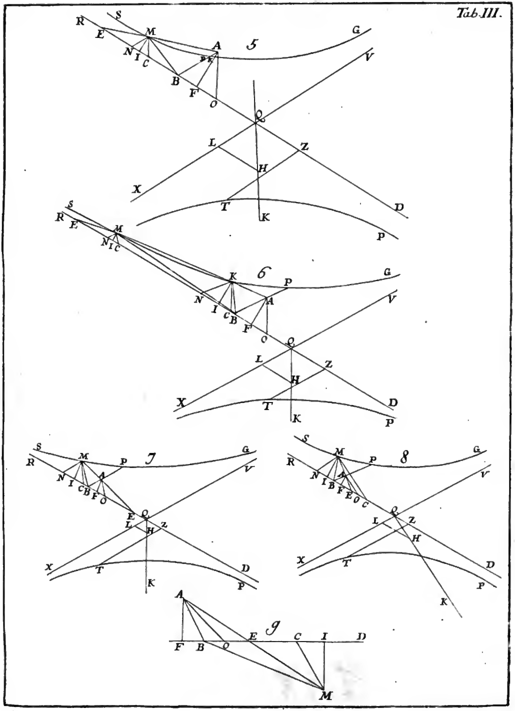
Pag. 4. *linea* 20. $-\frac{bbxx}{cc} + aacc - 2acbx + bbxx$. *Emendetur* $\frac{-bbxx + aacc - 2acbx + bbxx}{cc}$ || *Pag.* 10. *lin.* 24. $2aa - dd$ | $aa - dd$ || *ibidem lin.* 25. $2aa - dd$ | $aa - dd$ || *Pag.* 13. *lin.* 28. ſic | ſit || *Pag.* 14. *lin.* 8. Ignota vero | Recta vero || *Pag.* 17. *lin.* 2. maiores reliqua | (*Schol. Ppopoſit. I.*) || *ibid lin.* 16. erit $= EH + AE + N$ | erit $= EH - AE + N$ || *Pag.* 20 *lin.* 14. vertet | vertex || *Pag.* 24. *lin ultima* $AO . AF :: MC . ML.$ | $AO . AF :: MC . MI$ || *Pag.* 46. *lin.* 7. latu | caſu || *Pag.* 47. *lin.* 12. ab parabolam | ob parabolam || *Pag.* 48. *lin.* 18. ſecundus terminus | tertius terminus || *Pag* 54. *lin.* 3. Parabola | parabolam || *Pag* 57. *lin.* 23. rectae | rectè || *Pag.* 63. *lin.* 1. denominatur | denominetur || *ibid. lin.* 18. diameter | axis || *Pag.* 70. *lin.* 28 IV. | VI. || *ibid.* aedem | eaedem || *Pag.* 71. *lin.* 10. num. I. | initio lemmatis || *Pag.* 72. *lin.* 32. ſecundum | ſecundam || *Pag.* 80. *lin. ultima* ipſi AC | ipſi AIS || *Pag.* 84. *lin.* 12. huius | huic || *Pag.* 92. *lin.* 20. Fig. XVII. | Fig. XVIII. || *Pag.* 98. *lin.* 27. plena | plana || *Pag.* 115. *lin.* 7. $-\frac{cb}{r}\sqrt{2rx - xx}$. | $+\frac{cb}{r}\sqrt{2rx - xx}.dx$. || *Pag.* 116. *lin.* 9. $\frac{ccx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r}\sqrt{2rx - xx}$ | $\frac{crx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r}\sqrt{2rx - xx}.dx$. || *Pag.* 121. *lin.* 11. Ipomochlio | Ipomoclio.

Problemᵘ I.

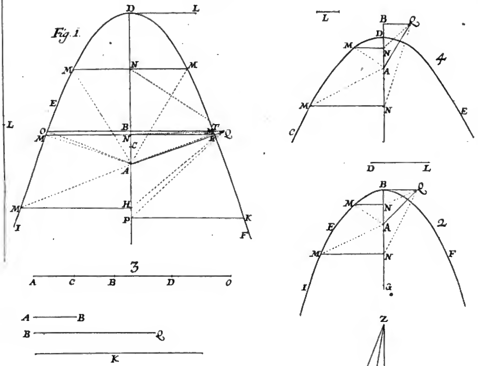



Tab. II.
Problem^is II.
Fig. 1.
19
2
Probl^is IV.
Fig. 1.
2
3
4

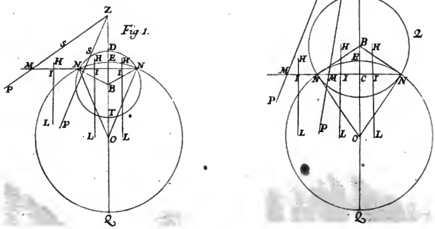
Tab. III.

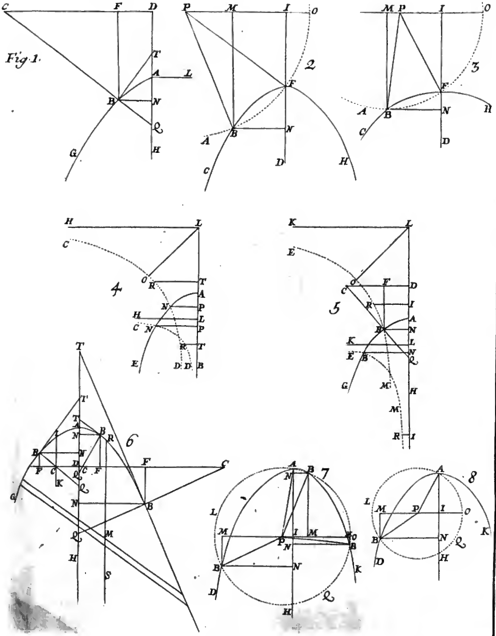


Probl.^us V.

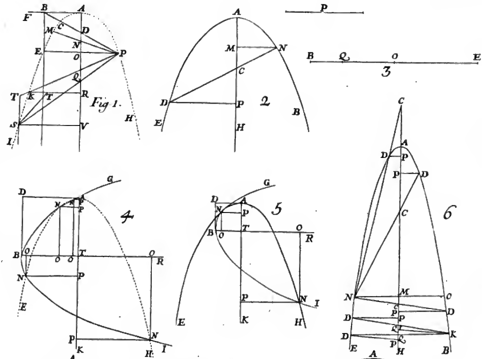


Probl.^us VI.

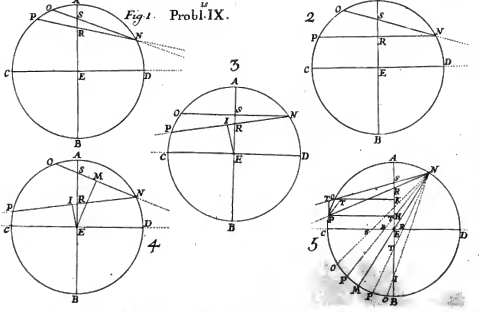


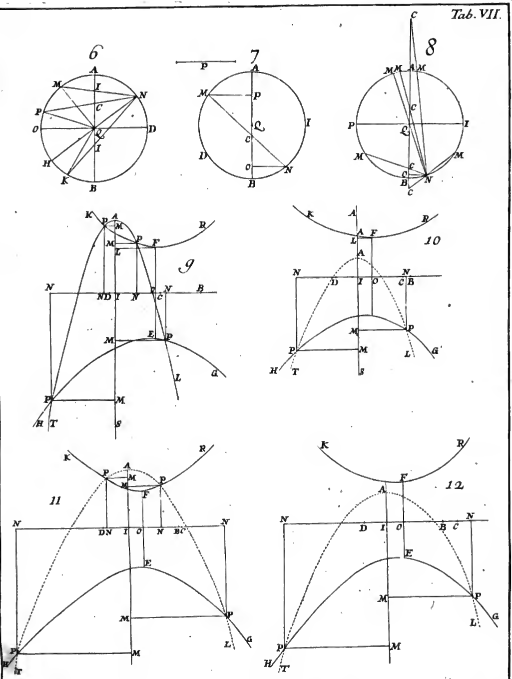

Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8

Probl.^{is} VIII.

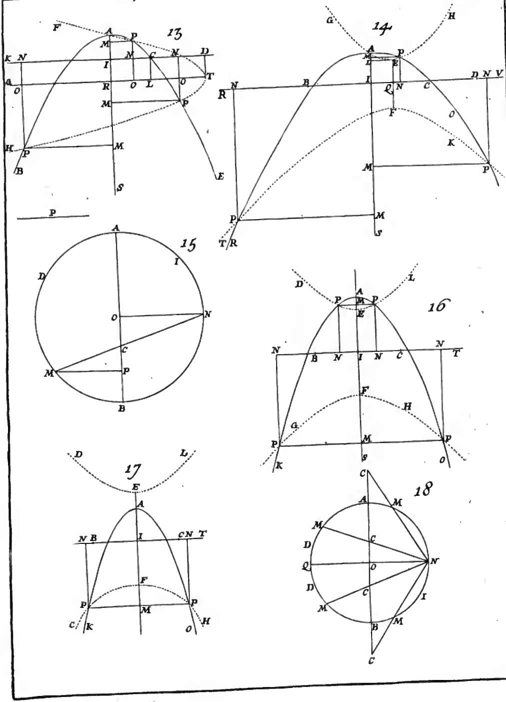


Probl.^{is} IX.

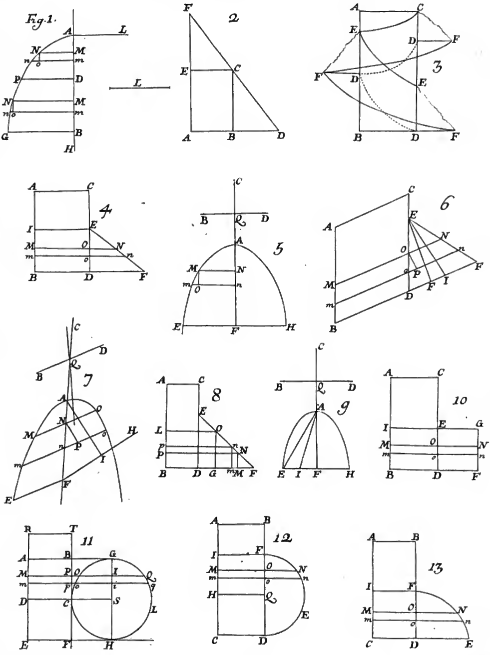



6
7
8
9
10
11
12

Tab. VIII.



Probl.^is X.



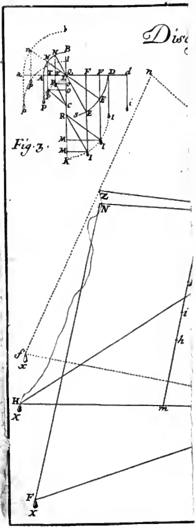


Fig. 3.